

**XII МІЖНАРОДНА КОНФЕРЕНЦІЯ  
«ПРОБЛЕМИ ТЕПЛОФІЗИКИ ТА ТЕПЛОЕНЕРГЕТИКИ»**

**ВИКОРИСТАННЯ КУМУЛЯНТІВ ДРУГОГО І ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ  
ДЛЯ ВИЯВЛЕННЯ ТА РОЗРІЗНЕННЯ  
СИМЕТРИЧНИХ СИГНАЛІВ НА ФОНІ ЗАВАДИ**

**к.т.н. В.С. Берегун<sup>1</sup>, к.ф.-м.н. О.І. Красильніков<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>КПІ ім. Ігоря Сікорського, Київ

<sup>2</sup>Інститут технічної теплофізики НАН України, Київ

Київ,  
26–27 жовтня 2021 року

# ШУМОВА ДІАГНОСТИКА

1

## Шумові сигнали

Джерела сигналів	Види сигналів
<ul style="list-style-type: none"> <li>газопоршневі двигуни;</li> <li>електричні генератори, двигуни;</li> <li>котли;</li> <li>насоси, компресори;</li> <li>парові та газові турбіни;</li> <li>трубопроводи та ін.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>аеродинамічні шуми;</li> <li>акустичні сигнали витоку;</li> <li>вібраційні сигнали;</li> <li>гідродинамічні шуми;</li> <li>сигнали акустичної емісії;</li> <li>флуктуації температури та ін.</li> </ul>

## Параметри шумових діагностичних сигналів

Моменти	Кумулянти	Кумулянтні коефіцієнти
<ul style="list-style-type: none"> <li>початкові:  <math display="block">\alpha_s = \mathbf{M}[\xi^s] = \int_{-\infty}^{\infty} x^s dF(x), \quad \alpha_1 = m;</math> </li> <li>центральні:  <math display="block">\mu_s = \mathbf{M}[(\xi - m)^s] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^s dF(x),</math> </li> </ul> <p><math>F(x)</math> – функція розподілу.</p>	$\kappa_s = \left. \frac{d^s \ln f(u)}{i^s du^s} \right _{u=0}, \quad i = \sqrt{-1},$ <p><math>f(u)</math> – характеристична функція,  <math>\kappa_1 = m; \quad \kappa_2 = \mu_2 = \sigma^2;</math>  <math>\kappa_3 = \mu_3; \quad \kappa_4 = \mu_4 - 3\mu_2^2.</math></p>	$\gamma_s = \frac{\kappa_s}{\kappa_2^{s/2}},$ <p><math>\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}</math> – коефіцієнт асиметрії;  <math>\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3</math> – коефіцієнт ексцесу.</p>

## Оцінки параметрів шумових діагностичних сигналів

Оцінки моментів	Оцінки кумулянтів	Оцінки кумулянтних коефіцієнтів
$\hat{\alpha}_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \xi_k^s, \quad \hat{m} = \hat{\alpha}_1;$ $\hat{\mu}_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (\xi_k - \hat{m})^s,$	$\begin{cases} \hat{\kappa}_1 = \hat{\alpha}_1; \\ \hat{\kappa}_2 = \hat{\mu}_2; \\ \hat{\kappa}_3 = \hat{\mu}_3; \\ \hat{\kappa}_4 = \hat{\mu}_4 - 3\hat{\mu}_2^2. \end{cases}$	$\begin{cases} \hat{\gamma}_3 = \hat{\mu}_3 / \hat{\mu}_2^{3/2}; \\ \hat{\gamma}_4 = \hat{\mu}_4 / \hat{\mu}_2^2 - 3. \end{cases}$

# ВИЯВЛЕННЯ СИГНАЛІВ

2

## Постановка задачі

Діагностичний сигнал	Кумулянти	Характеристики оцінок
$H_0: \xi(t) = \xi_3(t) - \text{завада};$ $H_1: \xi(t) = \xi_3(t) + \xi_c(t) - \text{суміш}.$	$H_0: \kappa_{s,0} = \kappa_{s,3};$ $H_1: \kappa_{s,1} = \kappa_{s,3} + \kappa_{s,c}.$	$H_0: M\hat{\kappa}_s = \kappa_{s,0}; D\hat{\kappa}_s = \frac{c_{s,0}}{N};$ $H_1: M\hat{\kappa}_s = \kappa_{s,1}; D\hat{\kappa}_s = \frac{c_{s,1}}{N}.$

## Характеристики виявлення

Вирішальне правило	Порогове значення	Імовірність правильного виявлення
$H_0, \text{ якщо } \theta_s \leq \hat{\kappa}_s;$ $H_1, \text{ якщо } \theta_s > \hat{\kappa}_s.$	$\theta_s = \kappa_{s,0} + x_{1-\alpha} \sqrt{\frac{c_{s,0}}{N}},$ $x_{1-\alpha} - \text{квантиль порядку } p;$ $\alpha - \text{імовірність помилки 1-го роду}.$	$d = 1 - \beta = 1 - F_s(\theta_s   H_1),$ $\beta - \text{імовірність помилки 2-го роду}.$

## Необхідний об'єм вибірки

$$N_s = \frac{(x_{1-\alpha} \sqrt{c_{s,0}} - x_{1-d} \sqrt{c_{s,1}})^2}{(\kappa_{s,1} - \kappa_{s,0})^2}$$

## Розподіли процесів

Завада	Сигнал
Нормальний розподіл $\xi_3(t): m_0 = 0 - \text{математичне сподівання};$ $\sigma_0 - \text{середнє квадратичне відхилення}.$	$\xi_1 = \sigma_c \frac{\xi_T}{\sigma_T}, \xi_T - \text{p. Ст'юдента з } \nu \text{ степенями свободи};$ $q^2 = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2} - \text{відношення сигнал/завада}.$

# РЕЗУЛЬТАТИ ВИЯВЛЕННЯ СИГНАЛІВ

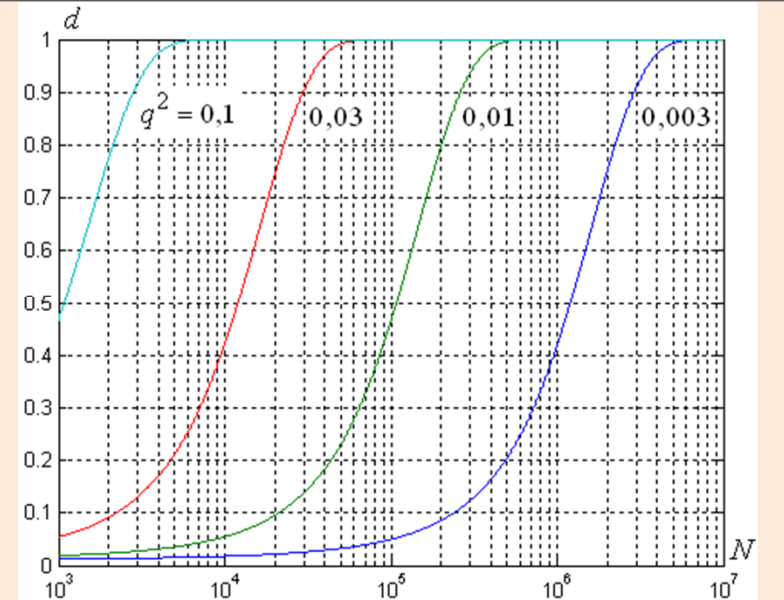
Необхідні об'єми вибірки  $\alpha = 0,01$ ,  $d = 0,99$

$q^2$	Для другого кумулянта $\theta_2 = \sigma_0^2 \left[ 1 + 2,326 \sqrt{\frac{2}{N}} \right]$		Для четвертого кумулянта $\theta_4 = 2,326 \sigma_0^4 \sqrt{\frac{24}{N}}$	
	$\nu = 10$	$\nu = 50$	$\nu = 10$	$\nu = 50$
0,003	$4,8248 \cdot 10^6$	$4,8248 \cdot 10^6$	$6,4525 \cdot 10^{12}$	$3,7926 \cdot 10^{14}$
0,01	$4,3728 \cdot 10^5$	$4,3728 \cdot 10^5$	$5,3010 \cdot 10^{10}$	$3,1154 \cdot 10^{12}$
0,03	$4,9568 \cdot 10^4$	$4,9559 \cdot 10^4$	$6,8199 \cdot 10^8$	$4,0037 \cdot 10^{10}$
0,1	$4,7834 \cdot 10^3$	$4,7744 \cdot 10^3$	$6,4518 \cdot 10^6$	$3,7353 \cdot 10^8$

Імовірність правильного виявлення сигналу (для  $\kappa_2$ )

$$d = 0,5 \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\sqrt{N}}{2} \frac{\theta_2 - (1 + q^2)}{\sqrt{2 + 4q^2 + \left[ \frac{3(\nu - 2)}{\nu - 4} - 1 \right] q^4}} \right) \right],$$

$\nu$  – кількість степенів свободи розподілу Стюдента;  
 $q^2 = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2}$  – відношення сигнал/завада.



# РОЗРІЗНЕННЯ СИГНАЛІВ

## Постановка задачі

Діагностичний сигнал	Кумулянти	Характеристики оцінок
$H_0: \xi(t) = \xi_3(t) + \xi_{c1}(t);$ $H_1: \xi(t) = \xi_3(t) + \xi_{c2}(t).$	$H_0: \kappa_{s,0} = \kappa_{s,3} + \kappa_{s,c1};$ $H_1: \kappa_{s,1} = \kappa_{s,3} + \kappa_{s,c2}.$	$H_0: M\hat{\kappa}_s = \kappa_{s,0}; D\hat{\kappa}_s = \frac{c_{s,0}}{N};$ $H_1: M\hat{\kappa}_s = \kappa_{s,1}; D\hat{\kappa}_s = \frac{c_{s,1}}{N}.$

## Характеристики виявлення

Вирішальне правило	Порогове значення	Імовірність правильного виявлення
$H_0$ , якщо $\theta_s \leq \hat{\kappa}_s;$ $H_1$ , якщо $\theta_s > \hat{\kappa}_s.$	$\theta_s = \kappa_{s,0} + x_{1-\alpha} \sqrt{\frac{c_{s,0}}{N}};$ $\theta_s = \kappa_{s,1} + x_{\beta} \sqrt{\frac{c_{s,1}}{N}}.$	$d = 1 - \beta = 1 - F_s(\theta_s   H_1)$ $\alpha$ – імовірність помилки 1-го роду; $\beta$ – імовірність помилки 2-го роду

## Розподіли процесів

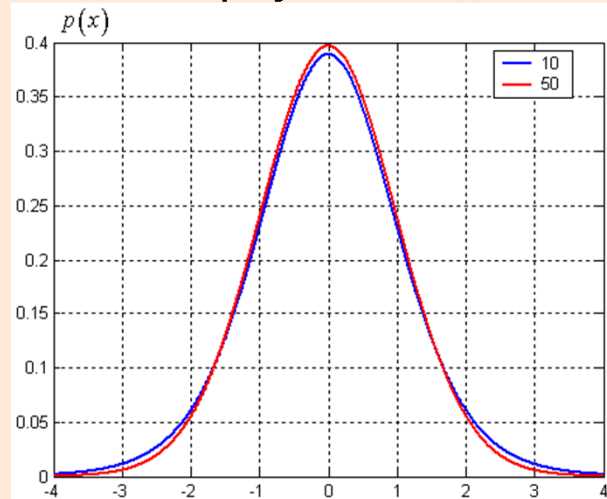
Завада	Сигнали
Нормальний розподіл $\xi_3(t): m_0 = 0$ – математичне сподівання; $\sigma_0$ – середнє квадратичне відхилення.	$\xi_1 = \sigma_c \frac{\xi_{\Sigma}}{\sigma_{\Sigma}}, q^2 = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_0^2}$ – відношення сигнал/завада; 1) $\xi_{\Sigma}$ – р. Стюдента з $\nu = 10$ степенями свободи; 2) $\xi_{\Sigma}$ – р. Стюдента з $\nu = 50$ степенями свободи.

## Необхідний об'єм вибірки

$$N_s = \frac{\left(x_{1-\alpha} \sqrt{c_{s,10}} - x_{\beta} \sqrt{c_{s,50}}\right)^2}{\left(\kappa_{s,50} - \kappa_{s,10}\right)^2}.$$

# РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРІЗНЕННЯ СИГНАЛІВ

Щільності імовірності сигналів ( $\nu = 10, \nu = 50$  степенів свободи)  
без врахування завади



Необхідні об'єми вибірки  $\alpha = \beta = 0,01$

$q^2$	Кумулянт 4-го порядку $N_4 = \frac{(x_{1-\alpha} \sqrt{c_{4,10}} - x_{\beta} \sqrt{c_{4,50}})^2}{(\kappa_{4,50} - \kappa_{4,10})^2}$	Коефіцієнт ексцесу $N_{\gamma 4} = \frac{(x_{1-\alpha} \sqrt{c_{\gamma 4,10}} - x_{\beta} \sqrt{c_{\gamma 4,50}})^2}{(\gamma_{4,50} - \gamma_{4,10})^2}$
0,003	$N_4 = 8,5847 \cdot 10^{12}$	$N_{\gamma 4,10} = 8,5847 \cdot 10^{12}$
0,01	$N_4 = 7,1508 \cdot 10^{10}$	$N_{\gamma 4,10} = 7,1508 \cdot 10^{10}$
0,03	$N_4 = 9,5615 \cdot 10^8$	$N_{\gamma 4,10} = 9,5615 \cdot 10^8$
0,1	$N_4 = 1,0233 \cdot 10^7$	$N_{\gamma 4,10} = 1,0232 \cdot 10^7$

- 1. Для розв'язання задачі виявлення необхідно використовувати кумулянт другого порядку діагностичного сигналу, оскільки це потребує значно менших об'ємів вибірки для забезпечення заданої імовірності правильного виявлення, ніж при використанні кумулянта четвертого порядку. Необхідний об'єм вибірки зменшується при збільшенні співвідношення сигнал/завада.**
- 2. Для розв'язання задачі розпізнавання двох виявлених сигналів при однакових співвідношеннях сигнал/завада використання кумулянта четвертого порядку та коефіцієнта ексцесу діагностичного сигналу потребують об'ємів вибірки одного порядку.**

**Дякую за увагу!**