Національна академія наук України
Інститут технічної теплофізики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Ковецька Юліанна Юріївна

УДК 536.2, 536.7, 532.5

ДИСЕРТАЦІЯ

Теплообмін, гідродинаміка та нестійкість в пористих середовищах та мікроканальних пристроях

144 – Теплоенергетика

Подається на здобуття наукового ступеня доктора філософії

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Ю.Ю. Ковецька

Науковий керівник – Авраменко Андрій Олександрович, член кореспондент НАН України доктор технічних наук, професор

Київ-2020

АНОТАЦІЯ

Ковецька Ю.Ю. Тепломасообмін, гідродинаміка та нестійкість в пористих середовищах та мікроканальних пристроях. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 144 – «Теплоенергетика». Інститут технічної теплофізики. Національна академія наук України. Київ, 2020.

Дисертаційна робота присвячена дослідженню теплогідродинамічних процесів в пористих середовищах та в пористих мікроканальних системах різної геометрії.

Запропоновано аналітичні та чисельні методи моделювання теплофізичних процесів в пористих мікросистемах. Підхід суцільного середовища використано з урахуванням граничних умов проковзування першого та другого порядку, що дозволяє розширити діапазон використання числа Кнудсена. Метод ґрат Больцмана (LBM) застосований для пласких і круглих мікроканалів з урахуванням пористості та умов проковзування. Використовуючи метод ренормалізаційних груп, розвинена мікроскопічна модель турбулентності для пористих середовищ. На основі цієї моделі, виведено вираз для ефективної кінематичної в'язкості з урахуванням пористості середовища. Метод збурень використано для вивчення гідродинамічної та теплової нестійкості. Зазначену аналітичну методику адаптовано для аналізу нестійкості, які виникають при врахуванні різних фізичних та геометричних умов (пористість, проковзування, та інше).

Наведено результати дослідження гідродинамічної нестійкості течії в пористому середовищі на основі тривимірних лінійних збурень та в пористих мікроканалах на основі двовимірних лінійних збурень. Показано збільшення критичних значень числа Рейнольдса зі збільшенням проковзування та зменшенням пористості, що зумовлено зростанням ступеню заповнення профілю швидкості. Визначено критерій нестійкості течії з урахуванням нелінійних ефектів, який дозволив знайти граничне значення пористості, при якому може розвинутись турбулентність. Досліджено гідродинамічну нестійкість потоку з проковзуванням в криволінійному пористому мікроканалі між двома нерухомими концентричними

циліндрами. Розрахунки показали, що збільшення коефіцієнта проковзування, пористості середовища і ширини каналу призводить збільшення заповненості профілю швидкості незбуреного потоку. Це, в свою чергу, призводить до збільшення критичних значень числа Діна і критичної довжини хвилі збурення, які визначають критерії нестійкості для потоку.

Досліджено гідродинаміку та теплообмін при змішаній конвекції в вертикальному, пласкому та циліндричному мікроканалах з пористою структурою враховуючи граничні умови проковзування першого порядку. Вплив числа Кнудсена більш виражений в пристінній області, в центральній частині каналу переважає вплив числа Релея. При малих числах Релея зменшення пористості інтенсифікує теплопередачу, а при великих значеннях числа Релея тенденція змінюється на протилежну. Ефекти мікротечій більше виражені при вимушеній конвекції. Причому в круглому каналі ця тенденція відчутніша тому, що в круглому каналі рідина стикається зі стінкою по всьому поперечному перерізу, тоді як в пласкому каналі тільки дві стінки контактують з рідиною, що значно послаблює вплив вільної конвекції. Порівняння аналітичних результатів з чисельними результатами на основі методу грат Больцмана показало розбіжність менше 1%.

Проведено аналітичні та чисельні дослідження теплообміну і гідродинаміки при примусовій конвекції в вертикальному пласкому та циліндричному пористих мікроканалах с граничними умовами проковзування другого порядку. Зменшення пористості викликає посилення теплопередачі. При високих числах Прандтля стрибок температури на стінці практично вироджується, що призводить до збільшення швидкості передачі тепла зі збільшенням числа Кнудсена. При малих числах Прандтля вплив параметрів другого порядку не спостерігався.

В цілому в роботі показано, що запропоновані чисельні та аналітичні методи моделювання дозволяють враховувати та аналізувати вплив ряду фізичних та геометричних параметрів на теплообмін та гідродинаміку в мікропористих структурах. Також вони дають змогу визначати режими течії в зазначених мікроструктурах. Результати досліджень можуть бути використані при проектуванні

та створенні нових мікроканальних систем, а також дають змогу оптимізувати найефективніші режимні робочі параметри вже існуючих систем.

Ключові слова: чисельне моделювання, аналітичне моделювання, теплообмін, гідродинаміка, пористість, мікроканал, проковзування.

Перелік публікацій:

Наукові праці, в яких опубліковані наукові результати дисертації:

1. Авраменко А. А., Дмитренко Н. П., Ковецкая Ю. Ю. Неустойчивость потока в пористом микроканале. Пром. теплотехника. 2017. Т. 39. № 1. С. 13 – 16. *[фахове видання]. (Вклад здобувача – постановка задачі, вибір і адаптація математичних моделей та проведення чисельних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів).*

2. Avramenko A. A, Dmitrenko N. P., Kovetskaya Y. Y. Linear and nonlinear instability of flow in channel occupied porous media. Пром. теплотехника. 2017. Т. 39. № 3. С. 40 – 46. *[фахове видання]. (Вклад здобувача – постановка задачі, проведення аналітичних розрахунків, вибір і адаптація математичних моделей та проведення чисельних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів).*

3. Авраменко А.А, Ковецкая Ю.Ю. Теплообмен и гидродинамика при смешанной конвекции в пористом микроканале. Промышленная теплотехника. 2017. Т.39. №4. С.33 – 38. *[фахове видання]. Вклад здобувача – постановка задачі, вибір і адаптація математичних моделей та проведення аналітичних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів).*

4. Ковецкая Ю.Ю. Эффект числа Прандтля на теплообмен в круглом пористом микроканале // Промышленная теплотехника. 2018. Т.40, №1, С. 21 – 26. *[фахове видання]. Вклад здобувача – постановка задачі, вибір і адаптація математичних моделей та проведення чисельних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів).*

5. Ковецкая Ю.Ю., Скицько А.И., Сорокина Т.В. Неустойчивость проскальзывающего потока в пористом криволинейном микроканале // Промышленная теплотехника. 2018. Т.40, №3, С. 20 – 25. *[фахове видання]. Вклад*

здобувача– постановка задачі, вибір і адаптація математичних моделей та проведення чисельних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів).

6. Avramenko A. A., Kovetska Yu. Yu., Shevchuk I. V., Tyrinov A. I., Shevchuk V. I Mixed Convection in Vertical Flat and Circular Porous Microchannels // Transport in Porous Media. 2018. Volume 124, Issue 3. P. 919 – 941. (Impact factor of Clarivate analytics (Web of Scince) - 2.376). *[іноземне видання; Міжнародні науко метричні бази: Scopus, ISI Web of Science]. (Вклад здобувача – постановка задачі, проведення аналітичних розрахунків, вибір і адаптація математичних моделей та проведення чисельних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів).*

7. Ковецкая Ю.Ю. Оценка длины проскальзывания при течении жидкости микроканалах // Промышленная теплотехника. 2018. Т.40, №3. С. 13 – 21. *[фахове видання]. Вклад здобувача (Вклад здобувача – аналіз впливу проковзування при течії в мікроканалах).*

8. Avramenko A. A., Kovetska Yu. Yu., Shevchuk I. V., Tyrinov A. I., Shevchuk V. I. Heat Transfer in Porous Microchannels with Second-Order Slipping Boundary Conditions. Transport in Porous Media. 2019. Volume 129, Issue 3. P. 673 – 699. – Impact factor of Clarivate analytics (Web of Science) - 2.376 *[іноземне відання; Міжнародні наукометричні бази: Scopus]. (Вклад здобувача - – постановка задачі, проведення аналітичних розрахунків, вибір і адаптація математичних моделей та проведення чисельних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів).*

9. Avramenko A. A., Shevchuk I. V., Kovetskaya M. M., Kovetska Yu. Yu. Darcy-Brinkman-Forchheimer Model for Film Boiling in Porous Media // Transport in porous media. – 2020. V. 134. – P. 503 – 536. - Impact factor of Clarivate analytics (Web of Science) - 2.376. *(Вклад здобувача – участь в розробці математичної моделі теплообміну в пористому середовищі, аналіз результатів та висновки)*

<u>Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:</u>

10. Авраменко А. А., Ковецкая М. М., Кравчук А. В., Ковецкая Ю. Ю. Перспективные исследования инновационных технологий ядерных энергетических установок. Пром. теплотехника. 2016. Т.38, №4. С.47 – 62. *[фахове видання]. (Вклад здобувача – аналіз інноваційних технологій ядерних енергетичних установок).*

11. Авраменко А. А., Ковецкая М. М., Ковецкая Ю. Ю., Кравчук А. В., Олейник Л. В. Теплообмен при течении воды сверхкритического давления в тепловыделяющей сборке в нестационарных режимах. Пром. теплотехника. 2016. Т.38,№5. С.59 – 68. *[фахове видання]. (Вклад здобувача – участь в розробці математичної моделі теплообміну при надкритичному тиску, аналіз чисельних розрахунків).*

12. Ковецкая М.М.,Кондратьева Е.А., Ковецкая Ю.Ю., Кравчук А.В., Скицько А.И., Сорокина Т.В. Режимы ухудшенного теплообмена при течении воды сверхкритического давления в каналах с пучками стержней. Ядерная енергетика та довкілля. 2016. №1(7). С.26 – 32. *[фахове видання]. (Вклад здобувача – участь в розробці математичної моделі погіршеного теплообміну, аналіз чисельних розрахунків).*

13. Авраменко А. А.,, Ковецкая М. М., Кравчук А. В., Ковецкая Ю. Ю. Теплофизические исследования для оценки безопасности перспективных ядерных энергетических установок. Ядерна та радіаційна безпека. 2017. № 2. С. 14 –19. *[вітчизняне відання; Міжнародні наукометричні бази: Scopus]. (Вклад здобувача – аналіз теплофізичних досліджень з безпеки ЯЕУ).*

14. Авраменко А.А., Дмитренко Н.П., Ковецкая М.М., Ковецкая Ю.Ю. Влияние проницаемости шаровой засыпки на теплообмен в активной зоне ядерного реактора с гелиевым теплоносителем. Промышленная теплотехника. 2017. Т.39. №1. С.55 – 60. *[фахове видання]. (Вклад здобувача – участь в розробці математичної моделі теплообміну в пористому середовищі, аналіз результатів та висновки).*

15. Авраменко А.А., Ковецкая М.М., Дмитренко Н.П., Ковецкая Ю.Ю. Исследование процессов теплообмена в модели активной зоны ядерного реактора с гелиевым теплоносителем. Ядерна та радіаційна безпека. 2017. № 4. С. 144 – 149. *[вітчизняне відання; Міжнародні наукометричні бази: Scopus]. Вклад здобувача - участь в розробці математичної моделі та методу розрахунку теплообміну в пористому середовищі, аналіз результатів та висновки*

16. Avramenko A. A., Shevchuk I. V., Moskalenko A. A., Lohvynenko P. N., Kovetska Yu. Yu. Instability of a vapor layer on a vertical surface at presence of nanoparticles. Applied Thermal Engineering. 2018. V.139. P. 87 – 98. (Impact factor of Clarivate

analytics (Web of Scince) – 3.771). *[іноземне видання; Міжнародні науко метричні бази: Scopus, ISI Web of Science]. (Вклад здобувача – постановка задачі, проведення аналітичних розрахунків, вибір і адаптація математичних моделей та проведення чисельних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів).*

17. Авраменко А.А., Ковецкая М.М., Тыринов А.И., Ковецкая. Ю.Ю. Характеристики закризисного теплообмена при пленочном кипении наножидкостей на вертикальной обогреваемой стенке. Ядерна та радіаційна безпека. 2018. №4(80). С.30 – 36. *[вітчизняне відання; Міжнародні наукометричні бази: Scopus]. Вклад здобувача – аналіз математичних моделей закризового теплообміну, результати розрахунків, висновки*

18. Avramenko A. A., Dmitrenko N. P., Kravchuk A. B., Kovetskaya Yu. Yu., Tyrinov A. I.. Hydrodynamics of a Nonstationary Flow in a Microcylinder Beginning Sudden Rotation. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2018. Vol. 91, №.6. pp 1452 – 1462. *[іноземне відання; Міжнародні наукометричні бази: Scopus]. Вклад здобувача - (Вклад здобувача – постановка задачі, проведення аналітичних розрахунків, вибір і адаптація математичних моделей та проведення чисельних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів).*

19. Авраменко А.А., Дмитренко Н.П., Кравчук А. В., Ковецкая Ю.Ю., Тыринов А.И Гидродинамика нестационарного потока в микроцилиндре при внезапном начале вращения. Инженерно-физичесский журнал. 2018. Т.91, №.6. С.1526–1536. *[іноземне відання; Міжнародні наукометричні бази: Scopus]. Вклад здобувача - (Вклад здобувача – постановка задачі, проведення аналітичних розрахунків, вибір і адаптація математичних моделей та проведення чисельних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів*).

20. Avramenko A. A., Shevchuk I. V., Dmitrenko N .P., Kovetska Yu. Yu., Tyrinov A. I. Unsteady theory of heat transfer and fluid flow during instantaneous transition to film boiling. International Journal of Thermal Sciences. 2020. V. 153. P.106345. – 10. *[іноземне видання; Міжнародні науко метричні бази: Scopus, ISI Web of Science]. (Вклад здобувача – участь у проведенні чисельних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів).*

Опубліковані праці апробаційного характеру:

21. Ковецька Ю.Ю. Влияние пористости на течение и теплообмен в микроканале. 2017. Тези доповідей X міжнародної конференції «Проблеми промислової теплотехніки». с.53. м. Київ, 23–26 травня. *(Вклад здобувача - – постановка задачі, проведення аналітичних та чисельних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів).*

22. Авраменко А.О., Ковецька Ю.Ю. Неустойчивость проскальзывающего потока в пористом криволинейном микроканале. 2018. Тези доповідей VI міжнародної науково – практичної конференції «Комп'ютерна гідромеханіка». с.53 м. Київ, 26–27 вересня. *(Вклад здобувача - – постановка задачі, проведення аналітичних та чисельних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів)*

23. Ковецька Ю.Ю. Особенности теплообмена в плоском пористом микроканале с граничными условиями проскальзывания второго порядка. 2019. Тези доповідей XI міжнародної конференції «Проблеми теплофізики та теплоенергетики». с. 56. м. Київ, 21–22 травня. *(Вклад здобувача - – постановка задачі, проведення аналітичних та чисельних розрахунків, узагальнення та аналіз результатів).*

ANNOTATION

Kovetska Yu.Yu. Heat transfer, hydrodynamics and instability in a porous media and microchannel devices - On the rights of the manuscript.

Dissertation for a PhD degree on specialty 144 – «Power engineering». - Institute of Engineering Thermophysics of the National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 2020.

The dissertation is devoted to the research of thermohydrodynamic processes in porous media and in porous microchannel systems of different configuration.

Analytical and numerical methods for modeling thermophysical processes in porous microsystems are proposed. The continuous medium approach is used taking into account the boundary conditions of slippage for the first and the second order, which allows expanding the range of use of the Knudsen number. The Boltzmann lattice method (LBM) is applied to flat and round microchannels taking into account the porosity and slip conditions. Using the method of renormalization groups, a microscopic model of turbulence for porous media was developed. Based on this model, the equation for the effective kinematic viscosity is derived, taking into account the porosity of the medium. The perturbation method was used to study hydrodynamic and thermal instability. This analytical technique is adapted for the analysis of instability, which taking into account different physical and geometric conditions (porosity, slippage, etc.).

The results of hydrodynamic instability studding flow in a porous medium based on three-dimensional linear perturbations and in porous microchannels based on two-dimensional linear perturbations are presented. Increase in the critical values of the Reynolds number with increasing slippage and decrease in porosity due to an increase in the degree of filling of the velocity profile is shown. The instability criterion is determined taking into account nonlinear effects, which allowed to find the limit value of porosity at which turbulence can develop. The hydrodynamic instability of the flow with slippage in a curved porous microchannel between two fixed concentric cylinders is investigated. Calculations have shown that increasing the slippage coefficient, the porosity of the medium and the width of the channel leads to an increase in the filling of the undisturbed of velocity profile. It leads to an increase in the critical values of the Dean number and the critical wavelength of the perturbation, which determine the instability criteria for the flow.

Fluid flow and heat transfer during mixed convection in vertical flat and cylindrical microchannels with a porous structure have been studied taking into account the boundary conditions of first - order slippage. The influence of the Knudsen number is more pronounced in the wall area, in the central part of the channel the influence of the Rayleigh

number prevails. At small Rayleigh numbers, the decrease in porosity intensifies heat transfer, and at large values of the Rayleigh number, the trend changes to the opposite. The effects of microflows are more pronounced in case of forced convection. Moreover, in the circular channel this tendency is more noticeable because in the circular channel the liquid is in contact with the wall across the entire cross section, while in the flat channel only two walls are in contact with the liquid, which significantly weakens the effect of free convection. Comparison of analytical results with numerical results based on the Boltzmann lattice method showed a discrepancy of less than 1%.

Analytical and numerical researches of heat transfer and fluid flow at forced convection in vertical flat and cylindrical porous microchannels with boundary conditions of slippage of the second order are carried out. Reducing the porosity causes increased heat transfer. At high Prandtl numbers, the temperature jump on the wall practically degenerates, which leads to an increase in the rate of heat transfer with an increase in the Knudsen number. At small Prandtl numbers, the effect of second-order parameters was not observed.

In general, the work shows that the proposed numerical and analytical modeling methods allow taking into account and analyzing the influence of a number of physical and geometric parameters on heat transfer and hydrodynamics in microporous structures. They also make it possible to determine the flow regimes in these microstructures. The research results can be used in the design and creation of new microchannel systems, as well as allow to optimize the most efficient operating parameters of existing ones.

Keywords: numerical simulating, analytical modeling, heat exchange, hydrodynamics, porosity, microchannel, slippage.

ЗМІСТ

ЗМІСТ

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ.....11

ВСТУП.....16

РОЗДІЛ 1. МОЖЛИВОСТІ, ПЕРСПЕКТИВИ ЗАСТОСУВАННЯ ПОРИСТИХ МІКРОКАНАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ В ПРОМИСЛОВОСТІ ТА ТЕХНОЛОГІЧНИХ ДОДАТКАХ ТА ОСОБЛИВОСТІ ТЕЧІЇ В НИХ 21

1.1. Особливості та перспективі використання пористих мікроканальних пристроїв…….....21

1.2. Теплообмін в пористих мікроканалах…….....25

1.3. Гідродинамічні процеси в пористих середовищах……..….29

1.4. Мета й задачі дослідження.....33

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ.....35

2.1. Математична модель теплообміну та гідродинаміки у пористих мікроканалах.....35

2.2. Метод грат Больцмана.....40

2.3. Метод RNG…….....52

2.4. Метод малих збурень.....63

2.5. Висновки до розділу 2.....66

РОЗДІЛ 3. НЕСТІЙКІСТЬ ПОТОКУ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ ТА МІКРОКАНАЛАХ…… ……61

3.1. Лінійна нестійкість у пласкому мікроканалі …….....61

3.2. Нелінійна нестійкість у пористому середовищі……....76

3.3. Відцентрова нестійкість в криволінійному мікроканалі……..…..78

3.4. Висновки до розділу 3.....85

РОЗДІЛ 4. ТЕПЛООБМІН ТА ГІДРОДИНАМІКА У ПОРИСТИХ МІКРОКАНАЛАХ РІЗНОЇ ГЕОМЕТРІЇ …….....87

4.1. Змішана конвекція у пласкому мікроканалі ……..……...87

4.2. Змішана конвекція в циліндричному мікроканалі……..…….99

4.3. Примусова конвекція у пласкому мікроканалі.....107

4.4. Примусова конвекція в циліндричному мікроканалі……..……..…117
4.5. Висновки до розділу 4.....126
ВИСНОВКИ.....127
СПИСОК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ.....129

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

a – коефіцієнт температуропровідності;

c - швидкість поширення хвиль;

c_i – інкремент наростання збурень;

c_r – швидкість поширення хвиль збурень;

c_F – коефіцієнт Форхаймера;

c_p – ізобарна теплоємність;

D_e - еквівалентний діаметр;

E – спектр турбулентної енергії;

e - координати положень ґрат;

f – розподіл молекул за напрямами грат;

F– Фур'є образ соленоідальної сили;

G – градієнт температури на стінці;

h – характерний розмір;

H – половина ширини каналу;

J − співвідношення в'язкостей;

k – константа Больцмана;

K – проникність;

K - Фур'є образ кінетичної енергії;

l – довжина каналу;

L – довжина вільного пробігу молекул;

L_s – довжина проковзування;

m – маса молекули;

M - параметр пористості середовища;

p – тиск;

P – Фур'є образ тиску;

q – щільність теплового потоку;

r, φ, z – циліндричні координати;

R – універсальна газова постійна;

s – напрямок косинусів вектору швидкості;

S – Фур'є образ напрямку косинусів вектора швидкості;

t – час;

T – температура;

u, υ, w – компоненти вектора швидкості;

U – Фур'є образ швидкості;

V – вектор швидкості;

x, y, z − декартові координати;

Грецькі символи:

α, β, κ, σ, υ − хвильові числа;

α – комплексна величина;

β – коефіцієнт теплового розширення, комплексна величина;

β_r – кругова частота коливання;

β_i – коефіцієнт зростання;

γ – коефіцієнт в'язкого проковзування;

δ – дельта-функція Дірака;

ε – швидкість дисипації;

λ – коефіцієнт теплопровідності; коефіцієнт гідравлічного опору;

μ – коефіцієнт динамічної в'язкості;

$\tilde{\mu}$ – ефективний коефіцієнт динамічної в'язкості;

ν – коефіцієнт кінематичної в'язкості;

ρ – щільність;

Π – периметр каналу;

τ – час релаксації;

υ – швидкість руху молекули;

φ – пористість; комплексна амплітуда;

ϕ – різниця температур;

Ψ – функція стуму;

ω, ϖ, χ – частота;

Безрозмірні величини:

R – безрозмірна радіальна координата;

U – безрозмірна осьова швидкість;

Y – безрозмірна координата;

θ – безрозмірна температура;

Нижні індекси:

e – координати положень ґраток;

w – на стінці;

f – рідина;

0 – начальна точка;

c, h, k, l, m, n, r, s, o – проекції на координати;

Критерії подібності:

$\mathrm{Da} = \frac{K}{h^2}$, $\mathrm{Da}_r = \frac{K}{r_0^2}$ − критерій Дарсі;

$\mathrm{Re}_{кр} = \frac{u_\infty h}{\nu}$, $\mathrm{Re}_{ш} = \frac{u_0 d}{\nu}$ − критерії Рейнольдса;

$\mathrm{Ra} = \frac{g\beta\Delta T h^3}{\nu\lambda}$ – число Релея;

$\mathrm{Nu} = \frac{\alpha h}{\lambda}$ – число Нуссельта;

$\mathrm{Pr} = \frac{\nu}{a}$ – число Прандтля;

$\mathrm{Kn} = \frac{L}{h}$ – число Кнудсена.

ВСТУП

Обґрунтування вибору теми дослідження. В останні роки дослідження фізичних процесів, що протікають на мікромасштабних рівнях в пористих середовищах, стають все більш актуальними. Це пов'язано зі зменшенням габаритно - масових характеристик побутових та промислових пристроїв, а також з унікальними характеристиками, властивими фізичним явищам на мікромасштабах.

Важливим завданням при створенні сучасних технологій є інтенсифікація процесів теплообміну. Одним з перспективних способів інтенсифікації є використання пористих матеріалів, що дозволяє збільшити теплообмін в 10-100 разів.

Область застосування пористих мікроканальних мікропристроїв має дуже широкий спектр і включає мікроелектроніку, енергетичні системи, біологію, медицину, хімію і т. п. У зв’язку з підвищенням вимог до енергетичної ефективності в сучасному будівництві широке використання набули конструкції із застосуванням пористих теплоізоляційних матеріалів, які мають підвищені теплозахисні властивості. Для цього при проектуванні необхідно мати характеристики процесів вологостійкості та теплоперенесу. Так як експериментальні дослідження в мікроканалах пов’язані з великими труднощами, для прогнозування перебігу фізичних процесів дуже важливо математичне моделювання. У зв'язку з характерними розмірами мікроканалів, закони, які описують теплообмін і гідродинаміку на макрорівні, не можуть застосовуватися. Це обумовлено наявністю явища проковзування, що з фізичної точки зору описується числом Кнудсена.

Таким чином, актуальність роботи полягає в тому, що отримані результати аналітичних та чисельних розрахунків можуть застосовуватися при розробці та оптимізації пористих мікропристроїв та застосовуватися в багатьох сферах промисловості.

Зв’язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася у відділі «Тепломасообмін та гідродинаміка в елементах

теплоенергетичного устаткування» у відповідності з науковою тематикою Інституту технічної теплофізики НАН України. Робота пов'язана з науковими дослідженнями в рамках наступних тем:

- 1.7.1.894 «Розвиток наукових засад теплової взаємодії будівлі з довкіллям та підвищення її енергоефективності на основі застосування інтелектуальних систем енергозабезпечення» (2020-2024 рр., №ДР 0120U101228).
- 1.7.1.892 «Розроблення науково-технічних засад інтенсифікації тепло масообміну в пористих середовищах для матеріалів будівельних конструкцій та теплоенергетичного обладнання» (2020-2021рр., №0120U100454).
- 1.7.1.862 «Дослідження інтенсифікації тепломасообміну при фазових переходах та дискретно - імпульсним введенні енергії в гетерогенних середовищах методами молекулярного та експериментального моделювання» (2015-2019 рр., № держ. реєстр. 0115U001026).
- 1.7.1.886 «Термогідравлічна нестійкість потоків теплоносіїв та розробка теплофізичних механізмів подолання її руйнівного впливу на елементи енергетичного обладнання» (цільова програма ВФТПЕ НАНУ) (2018-2019 рр., № держ. реєстр. 0118U002192).
- 1.7.1.878 «Аеродинаміка та теплообмін в світлопрозорих конструкціях при їх взаємодії з тепловим випромінюванням» (цільова програма ВФТПЕ НАНУ) (2017-2019 рр., № держ. реєстр. 0117U000832).
- 1.7.1.859 «Основи збільшення ефективності водо-водяних ядерних реакторів за рахунок переходу на надкритичні параметри теплоносія» (цільова програма ВФТПЕ НАНУ) (2013-2016 рр., № держ. реєстр. 0113U001166).

Мета і завдання дослідження.

Метою роботи є визначення закономірностей інтенсифікації теплообміну, гідравлічного опору, критеріїв гідродинамічної нестійкості та розвиток аналітично – чисельних методів дослідження процесів гідродинаміки, теплообміну та нестійкості потоків в пористих середовищах та мікроканальних системах. В ході досягнення поставленої мети вирішувалися такі основні **завдання:**

- дослідити лінійну гідродинамічну нестійкость течії в пористому середовищі на основі тривимірних та двовимірних збурень;
- визначення критерію нестійкості течії з урахуванням нелінійних ефектів;
- визначити механізми виникнення гідродинамічної нестійкості потоку в криволінійному пористому мікроканалі між двома нерухомими концентричними циліндрами;
- розвинути аналітичні та чисельні методи досліджень впливу змішаної конвекції у пористих мікроканалах різної геометрії з граничними умовами проковзування першого порядку;
- розвинути аналітичні та чисельні методи досліджень впливу примусової конвекції у пористих мікроканалах різної геометрії з граничними умовами другого порядку.

Об'єктом дослідження є пористе середовище та мікромасшабні системи.

Предметом дослідження є процеси теплообміну, гідродинаміки та нестійкості пористих мікромасшабних системах.

Методи дослідження. Рішення поставлених завдань здійснювалося шляхом аналітичного моделювання (аналітичні рішення, метод збурень та RNG метод) і чисельного моделювання (метод грат Больцмана та метод збурень). Проведено аналіз отриманих результатів, показано хорошу узгодженість між аналітичним розв'язком та результатами, отриманими за допомогою методу грат Больцмана.

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Вперше отримано аналітичні та чисельні результати при дослідженні змішаної конвекції в пористих вертикально пласких та круглих мікроканалах з урахуванням проковзування першого порядку точності на стінках.
2. Вперше одержано результати дослідження впливу примусової конвекції в пористих пласких і та круглих мікроканалах з умовами проковзування першого та другого порядку точності на стінках.
3. Вперше розвинуто метод грат Больцмана для проведення досліджень теплообміну та гідродинаміки в пористих мікроканалах різної конфігурації з урахуванням граничних умов проковзування першого та другого порядку точності.

4. Розширено аналіз впливу пористості та проковзування на стійкість ламінарної течії в пласкому каналі.
5. Розвинуто методи дослідження відцентрової нестійкісті потоку із проковзуванням в криволінійному пористому каналі між двома нерухомими циліндрами (течія Діна).

Практичне значення одержаних результатів:

- Отримані в дисертаційній роботі результати розрахунків в рамках договору «Розрахунок тепломасообмінних та гідродинамічних процесів у мікроканалах сенсорів тиску» були використані при оптимізації процесів в системах сенсорів тиску, які можуть застосовуватися виробниками датчиків (перетворювачів) тиску в якості чутливих елементів приладів у промисловості. Є акт використання результатів роботи в ДП СКТБ.
- Отримані в дисертаційній роботі результати розрахунків були використані в процесі оптимального вибору будівельних матеріалів з метою зменшення втрат тепла крізь огороджувальні конструкції будівель. Є акт використання результатів роботи в ТОВ «Монолітбуд 2001».

Особистий внесок здобувача. У роботах, що виконані у співавторстві автором виконано:

Інформаційний пошук, аналіз літературних даних та зроблено огляд - [7, 9, 12, 16];

Участь в постановці задачі, розробці та адаптації математичних моделей, проведення чисельних розрахунків, аналіз отриманих результатів - [4, 5, 10, 11, 13, 14];

Участь в постановці задачі, вибір та адаптація математичних моделей, проведення аналітичних і чисельних розрахунків, аналіз та верифікація результатів - [1, 2, 3, 6, 8, 15, 17, 18, 19].

Апробація результатів дисертації. Основні положення і матеріали дисертаційної роботи були представлені доповідями на міжнародних науково – практичних конференціях:

1. X Міжнародна конференція «Проблеми промислової теплотехніки», м. Київ, 23-26 травня 2017р.

2. VI Міжнародна науково – практична конференція «Комп'ютерна гідромеханіка», м. Київ, 26-27 вересня 2018р.

3. XI Міжнародна конференція «Проблеми теплофізики та теплоенергетики», 21-22 травня 2019р.

Обсяг і структура дисертації

Дисертаційна робота викладена на 140 сторінках машинописного тексту, складається зі вступу, 4 розділів, загальних висновків, списку використаних джерел. Обсяг основного тексту дисертації складає 123 сторінок друкованого тексту. Робота ілюстрована 4 таблицями, 34 рисунками. Список використаних джерел містить 128 найменувань.

РОЗДІЛ 1. МОЖЛИВОСТІ, ПЕРСПЕКТИВИ ЗАСТОСУВАННЯ ПОРИСТИХ МІКРОКАНАЛЬНИХ ПРИСТРОЇВ В ПРОМИСЛОВОСТІ І ТЕХНОЛОГІЧНИХ ДОДАТКАХ ТА ОСОБЛИВОСТІ ТЕЧІЇ В НИХ

1.1. Особливості та перспективі використання пористих мікроканальних пристроїв

Фізичні процеси, що протікають в пористих середовищах, оточують нас всюди та впливають на наше життя. У зв'язку з цим важливо розуміти характер цих процесів і можливість застосування їх оптимальним чином. Обширні дослідження, пов'язані з цим питанням, можна знайти в літературі [1 - 3].

В останні роки багато досліджень присвячено експериментальному і теоретичному вирішенню важливої науково-технічної задачі інтенсифікації теплообміну в елементах систем терморегулювання з метою підвищення їх теплотехнічної ефективності, надійності, зменшення маси і габаритів.

У зв'язку з тенденцією до зменшення геометричних розмірів і маси обладнання, пористі мікроструктурі елементи, типовими представниками яких є мікронасоси, мікротеплові трубки, мікроканальні теплообмінники - випарники, капілярно-пористі фітілі і т.п., знаходять все більш широке застосування в системах забезпечення теплових режимів радіоелектроніки, приладобудуванні, хімічної промисловості, космічних апаратах та медичній техніці. Велике число досліджень спрямовано на розробку перспективних методів надійного прогнозування роботи обладнання, їх транспортних і теплотехнічних характеристик, оптимальності процесів [4].

Пористі матеріали досить прості у виготовленні, можуть бути виконані з різних матеріалів і, відповідно, мати різні теплофізичні властивості. Розвиненість поверхні теплообміну дозволяє досягти високих коефіцієнтів тепловіддачі, що сприяє використанню пористих матеріалів в різних галузях і при критичних режимах роботи обладнання (високі теплові навантаження і температури тепловиділяючих поверхонь), забезпечуючи їх стійку роботу.

В останні роки велика увага приділяється пористому мікроканальному охолодженню, як одному з можливих способів зняття високих питомих теплових навантажень, а термоелектричне охолодження в поєднанні з використанням мікроканальних (пористих) елементів відповідає перспективним вимогам майбутнього. Зростання температури поверхонь з інтенсивним виділенням тепла викликає зниження конструкційних і прочностних властивостей матеріалів, що призводить до необхідності використовувати жароміцні матеріали і більш складні конструкції. Це в свою чергу часто веде до зниження компактності, зниження ефективності і зростання вартості установок [5].

З розвитком сучасних технологій зростає тепловиділення з компактних поверхонь, що яскраво виражено для мікроелектронної і комп'ютерної техніки. Наприклад, сучасна електронна апаратура характеризується високим ступенем компактності і інтенсивністю тепловиділення окремих елементів (до 100 Вт/см^2), тобто порівнянна з тепловим навантаженням авіаційного двигуна або ядерного реактора. В роботі [6] моделювання процесів теплообміну показує, що підвищення температури на 10°С може подвоїти щільність теплового потоку 3D чіпа, знижуючи тим самим продуктивність пристрою більш ніж на третину.

Advanced Thermal Solutions пропонує використовувати вбудовані тонкоплівкові термоелектричні пристрої, що містять мікроканали з водяним охолодженням. Запропонований підхід дозволяє розподіляти сконцентровану теплоту маленького мікропроцесора на більшій площі основи радіатора, який передає тепло в навколишнє середовище. У такій вбудованій системі примусового розподілу тепла є мікро- і міні-канали, що проходять через кремній. Швидкість потоку води всередині каналів становить приблизно від 0.5 до 1 л/хв.

Nextreme Thermal Solutions виступає за те, щоб починати охолодження на рівні чіпа. Компанія пропонує локалізоване глибоко всередині електронних компонентів управління тепловим режимом, використовує крихітні тонкоплівкові термоелектричні структури, відомі як теплові стовпчики. Термічно активний матеріал (наприклад, мідні стовпчики) вбудовується в міжкрістальні з'єднання для використання при корпусуванні електронного виробка.

У роботах [7, 8] експериментально досліджений теплообмін систем охолод - ження лазерних дзеркал з пористої вставкою. Отримані дані узагальнені для декількох систем охолодження з різними пористими елементами.

В роботі [9] розроблено і оптимізовано мікроканальна система охолодження і розподілу охолоджувача по теплонапруженій поверхні. На охолоджувальній поверхні (4см^2) організована рівномірна подача охолоджувача шляхом установки сопел в кількості 50 000 шт. з кроком 100 мкм. Втрати тиску склали 0,1 атм. при витраті 2,5 л / хв.

Також для охолодження мікроелектронного обладнання розробляються мініатюрні теплові трубки і мікроканальні системи охолодження з двофазним теплоносієм. Двофазні течії в каналах малого перетину використовуються в мембранних паливних елементах і випарно-конденсаційних системах термостабілізації космічних апаратів [10].

В роботі [11] представлені результати розрахункового моделювання обтікання потоком однофазного теплоносія квадратного і трикутного пучків стрижнів для визначення параметрів розроблюваної інтегральної моделі турбулентності, яка може бути використана при моделюванні активних зон ядерних реакторів і теплообмінників в наближенні пористого тіла.

Дослідження процесів теплообміну при течії двофазних теплоносіїв через пористі середовища актуальні для різних інженерних додатків в геотермальних системах, системах поховання ядерних відходів, системах зберігання і транспорту теплової енергії [12,13]. В роботі [12] наведено огляд літератури з моделювання течії рідини і газу в пористих мікроканалах для різних енергетичних програм. Розглянуто чотири застосування цих пристроїв в енергетичному секторі: пристрої для перетворення електрокінетичної енергії; мембранне опріснення води за допомогою зворотного осмосу; сланцеві колектори і зберігання водню. Дано рекомендації для подальшого поліпшення моделювання конвективних і дифузійних потоків в пористих середовищах мікро- і нанорозміру.

В роботі [14] розглянуті проблеми підвищення теплоенергетичної ефективності обладнання, запропоновано використання теплообмінних апаратів з

пористими наповнювачами. Проведено аналіз стану конструкції та розроблено рекомендації щодо визначення робочих параметрів теплообмінних апаратів з пористими вставками. Якісне збільшення поверхні оребрення в теплообмінних трактах може бути досягнуто з застосуванням пористих матеріалів. Суть використання таких матеріалів для створення ТА полягає в інтенсифікації теплообмінних процесів в проточній частині теплообмінного тракту шляхом повного, або часткового заповнення його пористим матеріалом, консолідованим з непроникними стінками. Інтенсифікація теплообміну забезпечується розвиненою внутрішньою поверхнею порових каналів в обсязі пористого матеріалу. При дослідженні подібних ТА відзначено збільшення тепловіддачі в 1,5..4 рази при зростанні гідравлічного опору в 4..12 рази. Такі характеристики визначили область застосування даних трактів в лазерної енергетиці, де основним параметром теплообмінного апарату є максимальне теплове навантаження.

У статті [15] наводяться результати використання пористих оксидів алюмінію (ПОА), які формуються з використанням електрохімічного процесу анодування. Широке застосування ПОА знаходять в мікроелектроніці (анодовані алюмінієві основи, системи багаторівневих з'єднань, алюмінієві корпуси для БІС і ГІМС). У статті описується технології виготовлення і застосування мембран на основі ПОА, світлових екранів, світлодіодних пристроїв, біомолекулярних структур, мікрополярізаторів, мікроканальних електронних помножувачів, шаблонів, сонячних елементів і ін.

Системи мікроканалів широко застосовуються при створенні хімічних чипів (хімічних мікрореактори [16, 17], які дозволяють на електронному рівні контролювати, управляти динамічно нестійкими хімічними реакціями. При цьому виникає можливість синтезу нових матеріалів з поліпшеними фізичними властивостями [18,19].

Також в останні роки з'явився широкий спектр мікропристроїв з криволінійної геометрією. Криволінійна геометрія каналів часто використовується в біотехнологіях та інших технічних пристроях для грануляції, сепарації і змішування мікрочастинок [20, 21]. Велика кількість цих пристроїв заснована на концепції

утворення поздовжніх вихорів під впливом відцентрових сил, що дозволяє забезпечити високу пропускну здатність і ефективність процесу.

1.2. Теплообмін в пористих мікроканалах та його дослідження

Під пористим середовищем зазвичай мають на увазі тверде тіло, що містить пори у вигляді порожніх проміжків складної форми. Порожня частка зазвичай заповнена повітрям, або будь - якою іншою рідиною. Пори можуть бути сполученими або замкнутими. Частка сполучених між собою пор становить ефективну пористість системи [5]. Пористість φ - це співвідношення об'єму пустотною фракції в пористому матеріалі до загального об'єму пористого матеріалу.

Закрита пористість характеризується ізольованістю пор поверхнею каркаса від зовнішнього середовища так, що в них не може надходити ні газ, ні рідина. Пористі матеріали з переважанням закритих пор застосовуються у виробництві енергозберігаючих будівельних і теплоізоляційних матеріалів. Прикладом можуть служити такі поширені матеріали як пінобетон, пінопласт, піноскло, і т.д. Відкрита пористість, навпаки, характеризується хорошою проникністю для газів і рідин завдяки каналам, що пронизує всю пористу структуру [22].

Ряд досліджень спрямовані на розуміння основних процесів в мікроканалах, порівнянні та співставленні характеристик течії і теплообміну для оптимізації і поліпшення експлуатаційних характеристик мікроканальних пристроїв в «чистому» середовищі [23-27]. Багато дослідників вивчали і аналізували питання гідродинаміки і теплообміну в різних умовах і в більшості випадків зіткнулися зі збільшенням тепловіддачі у пористому середовищі в порівнянні з «чистим» середовищем [28-37].

Пористе середовище може відрізнятися за багатьма властивостями (об'єм пор, їх геометрія, матеріал, з якого вона виготовлена і т.д.), однак важливою характеристикою є характерний масштаб пористого тіла. Роботи [38-39] присвячені комплексному вирішенню проблем формування теплофізичних властивостей теплоізоляційних матеріалів шляхом управління процесами тепломасообміну в

пористих структурах з метою створення нових і поліпшенню вже існуючих пористих теплоізоляційних матеріалів і конструкцій з них теплового захисту елементів промислових енергетичних установок. У роботах розроблена методологія створення пористих матеріалів з оптимальними теплофізичними властивостями завдяки зміні пористої структури на стадії формування матеріалів та запропоновані технологічні процеси для створення високоякісної продукції. Отримані рівняння для визначення ефективного коефіцієнту теплопровідності пористих структур з закритою та відкритою пористістю які включають розрахунок коефіцієнта теплової проникності та геометричних характеристик пористої структури й базуються на теорії перенесення теплової енергії флюїдами. Знайдено геометричні характеристики пористої структури та теплову проникність чотирнадцяти пористих теплоізоляційних матеріалів [40-42].

П. Гарг [43] розглянув питання змішаної, вільної і вимушеної конвекції в пограничному шарі вертикальної пластини, яка вбудована в пористе середовище. Вивчаються вплив числа Грасгофа, числа Прандтля, параметра проникності на профілі швидкості і температури і це показано на графіках. Отримано алгебраїчні вирази та чисельні значення для локального коефіцієнта поверхневого тертя і локального числа Нуссельта уздовж поверхні пластини.

Автори [44] пропонують нову концепцію конструкції мікроканального радіатора, в якій тверді ребра замінюються пористими ребрами для зменшення перепаду тиску на радіаторі. Результати показують, що падіння тиску в новій конструкції знижується на 43,0%. Зниження перепаду тиску пояснюється «проковзуванням» теплоносія на стінці каналу через наявність пористих ребер. Ефективність зниження опору для нової конструкції також розраховується за допомогою теорії проковзування, яка широко використовується для ультрагідрофобних поверхонь. Результати також показують, що ефективність зниження опору залежить від параметрів пористих ребер. Велика «швидкість проковзування» охолоджуючої рідини виникає при більш високій проникності, або більшому відношенні ширини ребра до кроку, що відповідає більшій довжині «проковзування». В результаті падіння тиску стає нижче в цих умовах.

В роботі [45] запропоновано конструкцію теплообмінного елемента на основі матриці ниткоподібних кристалів кремнію для систем термостабілізації мініатюрних джерел тепловиділення з питомою потужністю до 100 Вт/см^2, що працюють в широкому діапазоні температур навколишнього середовища. На основі розробленої математичної моделі конвективного перенесу теплоти в мікроканальних теплообмінниках з розвиненою поверхнею теплообміну проведено чисельне моделювання процесів гідродинаміки і теплообміну для різних конфігурацій мікроканальних вставок. Отримано поля тисків, швидкостей течії, температур охолоджувача і матриці з монокристалів кремнію в широкому діапазоні витрат охолоджувача, визначені критеріальні залежності для числа Нуссельта, а також втрат тиску різних геометричних конфігурацій теплообмінників. Досліджено критичні режими роботи, запропоновані напрями оптимізації. За розробленою технологією виготовлені дослідні зразки для проведення випробувань.

У роботах [46,47] представлена математична модель двофазного тепломасопереноса в капілярно-пористому середовищі, в якому двофазний потік розглядається як бінарна суміш. Крім того, додається рівняння збереження маси для рідини. Вводиться припущення, що температури рідини, пара та пористого тіла однакові. Модель двофазної суміші, представленої в роботі [46], застосовується для дослідження киплячого потоку уздовж нагрітої поверхні, вбудованої в пористе середовище [47]. Задача вирішується в наближенні приграничного шару. Крім того передбачається, що існує тонкий капілярний шар рідини на твердій поверхні з постійним насиченням. Представлені результати розрахунків профілю насичення, швидкостей фаз, залежно від теплового потоку на стінці від величини насичення. Отримано залежність для розрахунку граничного значення теплового потоку на стінці від величини насичення рідини на стінці.

В роботі [48] представлені результати теоретичного та експериментального дослідження процесів тепломасопереносу в капилярно - пористих середовищах теплових труб, здатних працювати в умовах невагомості. Досліджуються двофазні потоки в капілярних структурах із середнім діаметром пор 0,5 ... 15мкм. Розглядаються контурні теплові труби з роздільними течіями парової і рідкої фаз.

Відзначено, що при сильному збільшенні температурного напору виникає режим пульсацій, при якому з капіляра викидаються краплі рідини.

В роботі [49] показано результати аналітичного дослідження тепловіддачі в залежності від перепаду тиску в мікроканальних теплообмінниках. Математична модель включає рівняння імпульсу в наближенні Дарсі - Брінкмана, рівняння енергії і нерозривності для пористого середовища. Завдання вирішувалася з граничними умовами проковзування першого порядку точності. Розрахунки показали, що використання пористих вставок дозволяє підвищити коефіцієнт тепловіддачі. Збільшення пористості (число Da) призводить до більшого збільшення опору в порівнянні з тепловіддачею. А також, результати розрахунків з урахуванням проковзування дають більш високі значення коефіцієнта тепловіддачі в порівнянні з результатами розрахунків без урахування проковзування.

Використання граничних умов проковзування другого порядку точності дозволяє розширити межі і при моделюванні збільшити діапазон числа Кнудсена [50, 51, 52]. Загальна математична модель для потоків розріджених газів в трубах і каналах з гладкими стінками з граничними умовами другого порядку було розглянуто в [53]. Автори в [53] досліджували обґрунтованість моделі в діапазоні $0 < Kn < \infty$. Результати порівнювалися з результатами моделювання Монте-Карло, рішенням лінеарізованих рівнянь методом Больцмана і експериментальними даними. Верифікація результатів з експериментальним даними проводилася в діапазоні числа Кнудсена $0 < Kn < 0.5$ і отримала гарне узгодження.

В роботі [54] отримані експериментальні дані для газового потоку (гелію і азоту) в прямокутних мікроканалах. Результати порівнювалися з аналітичним рішенням. Показано, що запропонована модель с ГУ другого порядку справедлива для чисел Кнудсена $Kn \approx 0.25$, тоді як модель з ГУ першого порядку справедлива для $Kn \leq 0{,}05$. Найкраще відповідність знайдено для коефіцієнта акомодації тангенціального імпульсу $\sigma = 0{,}93$ як для гелію, так і для азоту.

Seyed Ali Rooholghdos et al. [55] вирішували завдання з використанням ГУ другого порядку для моделювання високошвидкісного обтікання нанорозмірной пластини і наноциліндра. Рівняння Нав’є - Стокса вирішувалися методом кінцевих

елементів Петрова-Гальоркіна. Результати для розрахунку профілю температури та швидкості порівнювалися з результатами альтернативного моделювання. Порівняння показало, що проведені розрахунки добре узгоджуються з результатами DSMS моделювання.

Автори роботи [56, 57] представили аналітичне рішення для коефіцієнтів проковзування першого і другого порядку точності для потоків газів в мікроканалах на основі рівнянь Больцмана. В роботі [58] представлено порівняння отриманих результатів для розподілу температури і коефіцієнта тепловіддачі при вирішенні завдання з граничними умовами проковзування першого і другого порядку. Розрахунки показали, що різниця між ними становить ≈ 35%.

Існує багато робіт по гідродинамічної нестійкості в мікроканалах при течії чистого середовища. Питання відцентрової нестійкості потоку в криволінійних каналах відображені в роботах [59, 60], питання нестійкості потоків Діна - в роботах [59, 61]. Було показано вплив різних параметрів на критичне значення чисел Тейлора і Діна. В роботі [62] розроблено нову модель термокапілярної нестійкості в тонкій плівці на основі модифікованого рівняння Орра - Зоммерфельда.

Вплив пористості середовища на процеси нестійкості ламінарної течії в пористому пласкому каналі вивчался в роботі [63], в гіперпорістому середовищі - в роботі [64]. Було проаналізовано залежність критичного числа Рейнольдса від різних параметрів середовища. Методом ренормгрупової (RNG) моделі досліджено виникнення турбулентності в пористому середовищі [65]. У роботах [66, 67] розглядається характер перебігу і нестійкості в пористих криволінійних каналах. Отримано рішення для профілю швидкості і критичного числа Діна в залежності від геометрії каналу і пористості середовища.

1.3. Гідродинамічні процеси в пористих середовищах

Розглянемо особливості гідродинаміки течії в пористих середовищах. Структура порового простору, розподілу пор і порових звужень за розмірами, властивості рідин, змочуваність стінок пор рідинами - всі ці параметри визначають

динаміку гідродинамічних процесів в пористому середовищі. Дослідження Г. Дарсі показали, що швидкість потоку в напрямку осі x пропорційно перепаду тиску та виглядає як

$$u = -\frac{K}{\mu}\frac{\partial P}{\partial x}, \qquad (1.3.1)$$

де $\partial P / \partial x$ - градієнт тиску в напрямку потоку; μ - динамічна в'язкість рідини; K - коефіцієнт проникності пористого середовища, м² [1].

У тривимірному вимірюванні рівняння (1.3.1) матиме вигляд

$$\mathbf{v} = \mu^{-1}\mathbf{K}\cdot\nabla P, \qquad (1.3.2)$$

де **К** є тензором другого порядку. Для ізотропного середовища величина K скалярна та рівняння (1.3.2) спрощується

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}\mathbf{v}. \qquad (1.3.3)$$

Значення коефіцієнта проникності K визначається геометрією середовища і варіюється в широких межах. Наприклад, при моделюванні пористого середовища з капілярами круглого перетину широко використовується співвідношення Кармана Козені

$$\hat{E} = -\frac{D_p \varphi^3}{180\left(1-\varphi^2\right)}, \qquad (1.3.4)$$

де D_p - діаметр капілярного волокна.

Закон Дарсі (1.3.3) описує ламінарний плин в області чисел Рейнольдса $Re_к$ від 0,1 до 1 і гідравлічний опір є лінійною функцією швидкості. Зі збільшенням швидкості (при $Re_к$ від 1 до 10) перехід до нелінійного опору гладкий, оскільки ще

немає переходу від ламінарного течії до турбулентного режиму і течія підпорядковується законам Дарсі та Форхаймера

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}\mathbf{v} - c_F K^{-1/2}\rho|\mathbf{v}|\mathbf{v}, \qquad (1.3.5)$$

де c_F – коефіцієнт Форхаймера. Раніше передбачалося, що коефіцієнт Форхаймера може бути універсальної постійної зі значенням приблизно 0,55. Біверс та ін. [68] показав, що значення c_F залежить від природи пористого середовища і добре корелюється співвідношенням

$$c_F = 0.55\left(1 - 5.5\frac{d}{D_e}\right),$$

де d - діаметр сфер, D_e - еквівалентний діаметр, який визначається за формулою

$$D_e = \frac{2lH}{l+H},$$

де l - висота і $2H$ - ширина відповідно.

Останній доданок в рівнянні (1.3.5) описує нелінійний гідравлічний опір в пористих середовищах, що обумовлено наявністю локальних видривів. При значеннях $\mathrm{Re}_к$ від 10 до 100 складова Дарсі на опір практично не впливає і його можна розраховувати тільки з урахуванням поправки Форхаймера [69].

Якщо течія відбувається в пористому середовищі, обмеженому твердими непроникними стінками, то вводиться поправка Брінкмана і вираз для гідравлічного опору має вигляд

$$\nabla P = -\frac{\mu}{K}\mathbf{v} + \tilde{\mu}\nabla^2\mathbf{v}. \qquad (1.3.6)$$

Останній член враховує складову тертя Стокса, що дозволяє задовольняти умову прилипання на стінках. При цьому вводиться величина $\tilde{\mu}$ - ефективна кінематична в'язкість пористого середовища, яка описує дифузний імпульс з урахуванням мікроскопічної структури та визначається співвідношенням [1]: $\tilde{\mu}/\mu = 1/\varphi$. Модель Брінкмана успішно описує середовища з високою пористістю [70] та при високих значеннях φ коефіцієнт $\tilde{\mu}$ зазвичай приймається рівним μ.

Подальші практичні та експериментальні дослідження показують, що рівняння Брінкмана доцільно використовувати при значних пористості φ > 0.6 [71]. Автори в роботі [72], використовуючи підхід функції Гріна, прийшли до висновку, що рівняння справедливо при φ > 0.95. Результати роботи [73] свідчать про доцільність застосування цього підходу при φ > 0.8.

Для прогнозування перебігу цих процесів виникають проблеми, пов'язані з питаннями дослідження гідродинамічної нестійкості течії. При цьому необхідно оцінювати значення критеріїв виникнення нестійкості.

При подальшому збільшенні числа Рейнольдса ($Re_к$) більше 10^2 відбувається перехід ламінарного течії в турбулентну [1].

Існують два підходи до вивчення турбулентної течії в пористому середовищі. Перший заснований на численних розрахунках, наведених в [63], де турбулентний плин розглядається у всьому пористому середовищі в цілому. Пізніше ці розрахунки були узагальнені в роботах [74, 75].

Другий підхід викладено в [76 - 82] і на відміну від першої точки зору, розглядає процес турбулентності в порах.

В роботі [83] проведено аналіз зазначених двох підходів, в результаті якого було визначено, що перший похід краще використовувати при розрахунку турбулентного течії для макропористих середовищ, яким відповідає велике значення числа Дарсі. Другий підхід більш підходить для випадків, коли розглядаються дуже щільні пористі середовища з маленькими значеннями числа Дарсі.

1.4. Мета та задачі дослідження

Наведений вище аналіз літературних джерел показав актуальність досліджень ефективного теплообміну і гідродинамічних ефектів течій в мікроканальних системах і пористих середовищах. Необхідність ретельного вивчення процесів в пористих мікроканалах зумовлена їх фізичними особливостями (течія вже не описується рівняннями гідродинаміки та тепломасообміну суцільних середовищ). Для забезпечення цих задач необхідно розробити нові та удосконалити існуючи математичні моделі прогнозування впливу різноманітних геометричних та фізичних факторів на теплообмінні процеси та зробити верифікацію розрахункових методів.

Крім того, що експериментальні дослідження тепло масообміну в мікроканалах провести досить складно, з їхньою допомогою вимірюються тільки інтегральні властивості течії: профіль швидкості, середні значення температур, падіння тиску і т.п.

Тому розробка і розвиток теоретичних основ при моделювання процесів дозволяють оптимально визначити параметри та умови надійності та економічності при обґрунтуванні вибору тих чи інших рішень проектуванні технологічних процесів та обладнання.

Метою роботи є чисельно - аналітичні дослідження процесів теплообміну, гідродинаміки і нестійкості в пористих мікромасштабних системах та мікроканальних пристроях. В ході досягнення поставленої мети вирішувалися такі основні **завдання**:

- дослідити лінійну гідродинамічну нестійкость течії в пористому середовищі на основі тривимірних та двовимірних збурень;
- визначити критерій нестійкості течії з урахуванням нелінійних ефектів;
- вивчити механізми виникнення гідродинамічної нестійкості потоку в криволінійному пористому мікроканалі між двома нерухомими концентричними циліндрами;

- розвинути аналітичні та чисельні методи досліджень впливу змішаної конвекції у пористих мікроканалах різної геометрії з граничними умовами проковзування першого порядку;
- розвинути аналітичні та чисельні методи досліджень впливу примусової конвекції у пористих мікроканалах різної геометрії з граничними умовами другого порядку.

РОЗДІЛ 2. МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ТА МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ

2.1. Математична модель теплообміну та гідродинаміки у пористих мікроканалах

При моделюванні процесів в пористих середовищах основна система рівнянь математичної моделі включає рівняння руху (рівняння Нав'є - Стокса), рівняння енергії (рівняння Фур'є - Кірхгофа) і рівняння нерозривності. Рівняння Нав'є - Стокса модифікується і в декартовій тривимірної системі координат має вигляд [69]:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{1}+\underbrace{u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}}_{2}=\underbrace{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}_{3}+\underbrace{Jv_f\nabla^2 u}_{4}-\underbrace{v_f\frac{\varphi}{K}u}_{5}-\underbrace{\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}|V|u}_{6},\\
&\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+w\frac{\partial \upsilon}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Jv_f\nabla^2\upsilon-v_f\frac{\varphi}{K}\upsilon-\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}|V|\upsilon, \qquad (2.1.1)\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Jv_f\nabla^2 w-v_f\frac{\varphi}{K}w-\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}|V|w,
\end{aligned}$$

де $J=\tilde{\mu}/\mu-$ співвідношення в'язкостей, $\tilde{\mu}$ - ефективний коефіцієнт динамічної в'язкості.

Рівняння енергії, яке описує теплообмін, в декартової тривимірної системи координат записується

$$\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Та рівняння нерозривності має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Також в даній роботі виконуються розрахунки мікротечій в круглих пористих каналах. Для нестисливої ламінарної течії в циліндричних тривимірних координатах система рівнянь руху запишеться наступним чином

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\mathrm{u}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\upsilon}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}-\frac{\upsilon^2}{r}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+$$
$$Jv_f\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{u}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-v_f\frac{\varphi}{K}u-\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}|V|u,$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+\mathrm{u}\frac{\partial \upsilon}{\partial r}+\frac{\upsilon}{r}\frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi}+\frac{u\upsilon}{r}+w\frac{\partial \upsilon}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+$$
$$Jv_f\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon}{r}-\frac{\upsilon}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial \varphi^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2}\right)-v_f\frac{\varphi}{K}u-\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}|V|u,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\mathrm{u}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\upsilon}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+$$
$$Jv_f\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{w}{r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)-v_f\frac{\varphi}{K}u-\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}|V|u.$$

Рівняння енергії в циліндричних координатах

$$\rho\left(\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\upsilon}{r}\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}\right)=\lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

А рівняння нерозривності виглядає як

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{u}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \upsilon}{\partial \varphi}+\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Перший доданок в рівнянні (2.1.1) враховує нестаціонарність процесу, другий - інерційні члени; третій доданок описує сили тиску. Отже, вплив пористості на гідродинаміку та теплообмін в рівняннях враховується наступними складовими. Четвертий доданок виражає складову Брінкмана, яка вводиться для задоволення граничних умов на твердих поверхнях, які межують з пористим середовищем [1]. П’ятий враховує лінійний закон гідродинамічного опору (Дарсі) в пористих

середовищах; шостий доданок - нелінійний закон гідродинамічного опору (аналогічно в інших рівняннях). Як обговорювалося вище (див. п. 1.3.), коректний опис гідродинаміки потоку залежить від режиму течії, тобто від числа Рейнольдса відносно проникності K

$$\mathrm{Re}_k = \frac{|V|\sqrt{K}}{\nu}.$$

Особливості дослідження теплообміну та гідродинаміки на мікрорівні полягає в тому, що основні закономірності руху рідини в мікроканалах істотно відрізняються від законів для каналів макромасштаба. Це пов’язано зі зменшенням лінійних масштабів та збільшенням площі поверхні по відношенню до маси мікропристрою, що призводить до суттєвого зростання перенесення маси, імпульсу та енергії через поверхню. При моделюванні необхідно враховувати такі нетрадиційні ефекти як проковзування потоку, тепловий стрибок, розрідження, стисливість, міжмолекулярні сили та інші.

Ще в 1823 р. Нав'є вказував, що явище проковзування рідини на стінках характеризується нерівністю швидкостей на межі розділу фаз [84] і умови проковзування залежать від характерних розмірів каналу, хімічних і фізичних властивостей поверхні стінки [85-88]. Найпростіша модель проковзування рідини на твердій поверхні передбачає, що тангенціальна сила, що діє на одиницю площі поверхні, пропорційна швидкості проковзування рідини на поверхні. У разі течії ньютонівської рідини на стінці каналу задаються граничні умови Нав'є у вигляді

$$u_w = L_s \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0},$$

де u_w - швидкість проковзування на стінці, L_s - довжина проковзування, яка характеризує відстань, на якому профіль швидкості екстраполюється до нульового значення. При умовах прилипання рідини до поверхні $L_s = 0$.

У 1879 році Максвелл запропонував вираз довжини проковзування для газів на основі кінетичної теорії [89]

$$L_s = \frac{2-\sigma_t}{\sigma_t} L,$$

де σ_t - коефіцієнт акомодації тангенціального імпульсу, L – довжина вільного пробігу молекул газу. У 1909 році Кнудсен провів експеримент та підтвердив цю модель [90]. У наступні десятиліття це підтверджувалось експериментальними даними [91 – 95].

В якості характеристик потоку одним з основних критеріїв, що характеризують систему, є число Кнудсена (Kn), яке є безрозмірним параметром, пропорційним відношенню довжини вільного пробігу молекул газу (L) до характерного розміру системи. З фізичної точки зору число Кнудсена описує ефекти проковзування на стінці каналу, включаючи стрибок швидкості і температури.

$$\mathrm{Kn} = \frac{L}{H}.$$

Як видно з цього виразу, число Кнудсена зростає зі збільшенням ступеню розрядження, або зі зменшенням розміру системи, тобто в мікро і наномасштабних потоках. Наявні теоретичні та експериментальні дані свідчать про те, що потоки газу або рідини зазвичай діляться на наступні режими. Для (Kn < 0,001) рідина розглядається як суцільне середовище, гідродинаміка якого описується рівняннями Нав'є - Стокса. [96]. В діапазоні чисел Кнудсена (0,01< Kn < 0,1) тепломасобмін і гідродинаміка як правило моделюється шляхом включення граничних умов гідродинамічного та теплового проковзування [97]. В області перехідного режиму (0,1< Kn < 10) зазвичай використовують статистичні методи, наприклад Монте-Карло, або методи, що базуються на рівнянні Больцмана. Системи, для яких число Кнудсена $\mathrm{Kn} > 10$ вважаються сукупністю вільних молекул. Для їх моделювання

використовуються методи молекулярної динаміки, дисипативної динаміки часток або фізико-хімічні методи [98].

Враховуючи все вищесказане, згідно з [99], приймаємо, що при моделюванні течій в діапазоні чисел Кнудсена $10^{-3} < \mathrm{Kn} < 0{,}1$ скачок поздовжньої компоненти швидкості в пристінній області для першого порядку точності визначається наступним чином

$$u_w = A_1 \mathrm{Kn}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_w . \qquad (2.1.2.)$$

а для другого порядку точності виглядає як

$$u_w = A_1 \mathrm{Kn}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_w + A_2 \mathrm{Kn}^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right)_w . \qquad (2.1.3.)$$

Скачок температури в пристінній області для першого порядку точності розраховуємо наступним чином

$$T - T_w = A_1 \frac{\mathrm{Kn}}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w . \qquad (2.1.4.)$$

а для другого порядку точності відповідно

$$T - T_w = A_1 \frac{\mathrm{Kn}}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w + A_2\left(\frac{\mathrm{Kn}}{\mathrm{Pr}}\right)^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial n^2}\right)_w . \qquad (2.1.5.)$$

У виразах (2.1.2) – (2.1.5) похідна $\partial / \partial \mathrm{n}$ - - градієнт по безрозмірній нормалі до стінки, A_1 та A_2 – коефіцієнти проковзування першого та другого порядку відповідно.

У таблиці (2.1.2) представлені вирази для обчислювання значень коефіцієнтів проковзування A_1 та A_2, в таблиці (2.1.1) - результати деяких досліджень для різних комбінацій коефіцієнтів проковзування [17].

Таблиця 2.1.1. Значення коефіцієнтів A_1 та A_2.

A_1	A_2	Посилання
1	0	Maxwell [89]
1	5π/12	Karniadakis and Beskok [53]
1	-0,5	Karniadakis and Beskok [53]
1,1466	0,9756 або 0.647	Cercignani [100]
1,1466	0	Albertoni et al. [101]
1	0.145 – 0.19	Lockerby [102]
1,11	0,61	Hadjiconstantinou [103]

Таблиця 2.1.2. Вирази для коефіцієнтів A_1 та A_2.

A_1	A_2	Посилання
$\frac{2-\sigma_t}{\sigma_t}$	0	Maxwell [7]
$\frac{2-\sigma_t}{\sigma_t}$	$-\frac{2-\sigma_t}{\sigma_t}$	Karniadakis and Beskok [53]
$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{2-\sigma_t}{\sigma_t}(1+0{,}1621\sigma_t)$	$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}+A_1^{\,2}\right)$	Cercignani [100]
$\frac{2-\sigma_t}{\sigma_t}$	$\frac{9}{4\pi}\frac{\mathrm{Pr}(\sigma-1)}{\sigma}$	Lockerby [102]

2.2. Метод грат Больцмана

Останнім часом широко застосовується комп'ютерне моделювання течій методом ґратчастих рівнянь Больцмана - Lattice Boltzmann Method (LBM). При цьому метод LBM більш перспективний, ніж звичайні кінцево-різницеві методи, він має значні переваги в деяких галузях (течії в пористому середовищі, багатофазні й багатокомпонентні течії), так як більш адекватний природі речовини. На відміну від класичних методів розрахунку течій рідини шляхом розв'язання рівнянь Нав'є –

Стокса, метод грат Больцмана розглядає течію як рух ансамблю частинок, що мають деяку функцію розподілу за дискретними швидкостями.

Метод ґрат Больцмана (LBM) базується на дискретизації рівняння Больцмана у наближенні BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) [104].

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\upsilon}_i \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{1}{\tilde{\tau}}\left(\tilde{f}^e - \tilde{f}\right). \qquad (2.2.1)$$

де $\tilde{\tau}$ – час релаксації, $\tilde{f}^e$ – рівноважний розподіл молекул відповідно розподілу Максвелла. В даному розділі «хвиля» вказує, що параметр розмірний.

$$\tilde{f}^e = \tilde{\rho}\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m(\tilde{\upsilon}-\tilde{\mathbf{u}})^2}{2kT}\right). \qquad (2.2.2)$$

Перепишемо рівняння (2.2.1) у вигляді кінцевих різниць

$$\frac{\tilde{f}(\tilde{x}_i + \Delta\tilde{x}_i, \tilde{\upsilon}_i, \tilde{t} + \Delta\tilde{t}) - \tilde{f}(\tilde{x}_i + \Delta\tilde{x}_i, \tilde{\upsilon}_i, \tilde{t})}{\Delta\tilde{t}} + \tilde{\upsilon}_i \frac{\tilde{f}(\tilde{x}_i + \Delta\tilde{x}_i, \tilde{\upsilon}_i, \tilde{t}) - \tilde{f}(\tilde{x}_i, \tilde{\upsilon}_i, \tilde{t})}{\Delta\tilde{x}_i} = \frac{\tilde{f}^e - \tilde{f}}{\tilde{\tau}}. \qquad (2.2.3)$$

Приймаючи до уваги, що $\tilde{x}_i + \tilde{c}_i\Delta\tilde{t}$ займає фіксоване положення в просторовій решітці, $\Delta\tilde{x}_i = \tilde{c}_i\Delta\tilde{t}$. Так як вектор швидкості також фіксований, то $\tilde{f}(\tilde{x}_i, \tilde{\upsilon}_i, \tilde{t}) = \tilde{f}(\tilde{x}_i, \tilde{t})$. В результаті вираз (2.2.3) виглядає як

$$\frac{\tilde{f}(\tilde{x}_i + \Delta\tilde{x}_i, \tilde{t} + \Delta\tilde{t}) - \tilde{f}(\tilde{x}_i, \tilde{t})}{\Delta\tilde{t}} = \frac{\tilde{f}^e - \tilde{f}}{\tilde{\tau}}. \qquad (2.2.4)$$

Після розкладу лівої частини (2.2.4) у ряд Тейлора до другого порядку отримаємо

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{c}_i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i}+\frac{1}{2}\Delta\tilde{t}\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{c}_i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i}\right)+\tilde{c}_j\frac{\partial}{\partial \tilde{t}}\left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{t}}+\tilde{\upsilon}_i\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \tilde{x}_i}\right)\right)+O\left(\partial^3\right)=\frac{\tilde{f}^e-\tilde{f}}{\tilde{\tau}}.$$

Значення для $\tilde{f}$ отримаємо з рівняння (2.2.1). Помножимо отримане рівняння на $\tilde{\upsilon}_j$ та проінтегруємо результуючий вираз по $\tilde{\upsilon}$. Використовуємо для $\tilde{f}^e$ вираз (2.2.2) та проінтегрувавши результат, одержимо

$$\tilde{\rho}\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}}+\tilde{\rho}\tilde{u}_j\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j}=-\frac{\partial(\tilde{\rho}RT)}{\partial \tilde{x}_i}+\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}\left(\tilde{\rho}\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\Delta\tilde{t}RT\left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j}+\frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i}\right)\right), \qquad (2.2.5)$$

де $\tau=\tilde{\tau}/\Delta\tilde{t}$, $R=k/m$.

При обчислюванні виразу (2.2.5) враховувались співвідношення [105]

$$\tilde{\rho}=\int \tilde{f}d\tilde{\upsilon},$$
$$\tilde{\rho}\tilde{u}=\int \tilde{c}\tilde{f}d\tilde{\upsilon}.$$

При порівнянні класичного рівняння Навье-Стокса з (2.2.5) можна зробити висновок, що кінематична в'язкість визначається як

$$\tilde{\nu}=\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\Delta\tilde{t}RT.$$

При обезрозмірюванні (2.2.5) враховуємо, що середня швидкість частинок

$$\upsilon=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{3RT}. \qquad (2.2.6)$$

В результаті маємо безрозмірну форму в «гратчастих» змінних для нестисливого потоку

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3}\left(\tau - \frac{1}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \tag{2.2.7}$$

де

$$u_i = \frac{\tilde{u}_i}{\tilde{\upsilon}}, \quad p = \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}\tilde{\upsilon}^2}, \quad x_i = \frac{\tilde{x}_i}{\Delta\tilde{x}}, \quad t = \frac{\tilde{t}}{\Delta\tilde{t}}.$$

Виходячи з (2.2.7), в'язкість для дискретної «гратчастої» моделі

$$\nu = \frac{1}{3}\left(\tau - \frac{1}{2}\right) = \frac{2\tau - 1}{6}. \tag{2.2.8}$$

Далі визначимо зв'язок між безрозмірними і «гратчастими» змінними. Визначимо час релаксації τ та зв’язок між ним та макромасштабами потоку. Для цього зробимо процедуру обезрозмірювання рівняння Нав’є - Стокса по макромасштабам швидкості, часу і довжини - $\tilde{U}_0, \tilde{\Omega}, \tilde{L}$ відповідно. Макромасштаби часу і довжини пов'язані з «гратчастими» масштабами наступним чином

$$\Delta t = \tilde{\Omega} / N_{\text{iter}} = \tilde{\Omega}\delta_t, \quad \Delta x = \tilde{h} / N = h\delta_x.$$

де N_{iter} - кількість ітерацій; N - кількість елементів ґраток по довжині каналу; δ_t, δ_x - просторовий та часовий інтервал для ґрат.

Рівняння Нав’є - Стокса у безрозмірній формі набуває вигляду

$$\frac{\tilde{L}}{\tilde{\Omega}\tilde{U}_0}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{t}} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_i} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_i}\right), \tag{2.2.9}$$

де

$$\mathrm{Re}=\frac{\tilde{U}_0\tilde{h}}{\tilde{\nu}},\quad \bar{p}=\frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}\tilde{U}_0^2},\quad \bar{u}_i=\frac{\tilde{u}_i}{\tilde{U}_0},\quad \bar{t}=\frac{\tilde{t}}{\tilde{\Omega}},\qquad \bar{x}_i=\frac{\tilde{x}_i}{\tilde{L}}.$$

Визначимо, що $U_0\Omega=L$, та перейдемо в (2.2.9) від безрозмірних змінних до «гратчастих»

$$\frac{\delta_x}{\delta_t^2}\frac{\partial u_i}{\partial t}+\frac{\delta_x}{\delta_t^2}u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=-\frac{\delta_x}{\delta_t^2}\frac{\partial p}{\partial x_i}+\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{1}{\delta_x\delta_t}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right).$$

В результаті при порівнянні (2.2.7) та (2.2.9) з врахуванням (2.2.8) отримаємо

$$\nu=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta_t}{\delta_x^2}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\delta_t}{\delta_x}\frac{1}{\delta_x}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\Delta\tilde{t}}{\tilde{\Omega}}\frac{\tilde{h}}{\Delta\tilde{x}}\frac{1}{\delta_x}=\frac{1}{\mathrm{Re}}\frac{\overbrace{\tilde{h}/\tilde{\Omega}}^{\ddot{U}_0}}{\underbrace{\Delta\tilde{x}/\Delta\tilde{t}}_{\tilde{\upsilon}_A}}N=\frac{\bar{U}_0N}{\mathrm{Re}},$$

де $\bar{U}_0=\tilde{U}_0/\tilde{\upsilon}$.

На основі цього аналізу можна зробити висновок про еквівалентність «гратчастого» рівняння Больцмана (2.2.1) та безрозмірного рівняння Нав'є-Стокса.

Далі розглянемо особливості застосування методу LBM у мікроканалах, заповнених пористим середовищем.

Рівняння Больцмана для руху та енергії у наближенні BGK у поданні кінцевих різниць можна записати у наступному вигляді [104]

$$\begin{aligned} f(x_i+\Delta x_i,t+\Delta t)-f(x_i,t)&=\frac{f^e-f}{\tau}+F(x_i,t)\\ f_T(x_i+\Delta x_i,t+\Delta t)-f_T(x_i,t)&=\frac{{f_T}^e-f_T}{\tau_T}\end{aligned}. \qquad (2.2.10)$$

де $\Delta x_i, \Delta t$ - просторові та часові кроки відповідно; τ і τ_T є безрозмірними, пов'язаними з часом релаксації руху та енергії відповідно; f та f_T - функції розподілу молекул та енергії; f^e і $f_T{}^e$ є рівноважними розподілами молекул та енергії, що відповідають розподілу Максвелла, $i = 1 \ldots d$, де d - просторовий вимір; F - становить собою силу.

В основу методу покладено ідею, що розташування однієї частинки є дискретним, щоб частинка могла займати це положення лише у вузлах грат. Форма комірок грат може бути довільною. При цьому прямокутна гратка є найбільш прийнятною для декартових координат.

Оскільки нам потрібно імітувати потоки як в плоскому каналі, так і в трубі, ми використовували два типи граток: для плоского каналу - двовимірна гратка *D2Q9* з дев'ятьма напрямками швидкості, а для круглого каналу - тривимірна гратка *D3Q15* з п'ятнадцятьма напрямками швидкості (рис. 2.2.1).

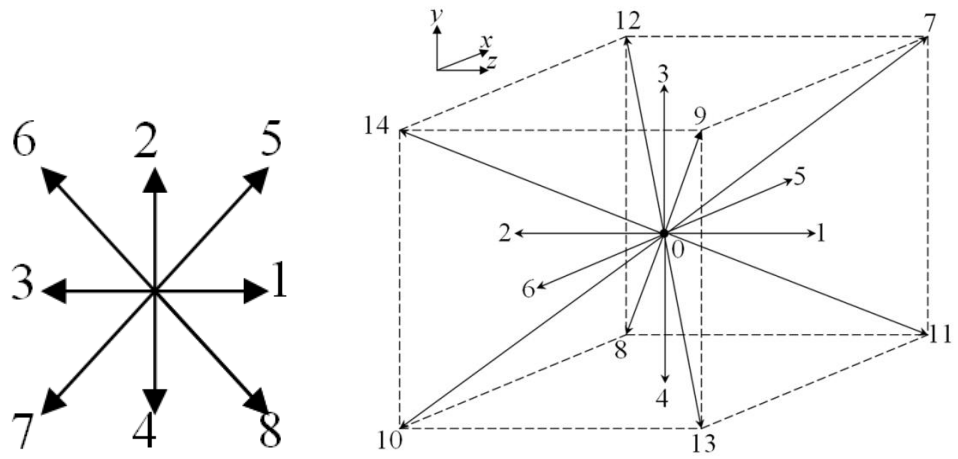


Рис. 2.2.1. Напрямки швидкості граток: а) D2Q9; б) D3Q15

Згідно [106], вираз для зовнішньої сили, враховуючи вплив пористого середовища, записується як

$$\mathbf{F} = -\frac{\varphi\mu}{K\rho}\mathbf{u},$$

$$K = \mathrm{Da}H^2,$$

де φ - пористість середовища.

Згідно [106, 107], форма виразу для F_j з точки зору механіки рідини є

$$F_j = w_j \rho \left(1 - \frac{1}{2\tau}\right)\left[\frac{3(e_j \cdot \mathbf{F})}{c^2} + \frac{9(\mathbf{u} \otimes \mathbf{F} : e_j \otimes e_j)^2}{\varphi c^4} - \frac{3\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}}{\varphi c^2}\right],$$

де $\otimes$ - діадичний добуток двох векторів, $:$ - скалярний добуток двох векторів.

Для дискретної решітки макропараметри описуються наступними співвідношеннями

$$\rho = \sum_j f_j,$$
$$\rho \mathbf{u} = \sum_j c_j f_j,$$
$$p = \frac{1}{3}\sum_j (c_j - \mathbf{u})^2 f_j,$$
$$\rho \varepsilon = \sum_j f_{T,j},$$

де j – кількість швидкісних каналів,

Враховуючи , що

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{u}}{dt},$$

та беручи до уваги, що маса пропорційна густині, і що час релаксації τ є елементарним часом зіткнення молекул, внесок зовнішньої сили у швидкість визначається формулою

$$\Delta \mathbf{u} = \frac{\tau \mathbf{F}}{\rho}.$$

Значення функцій рівноважного розподілу f_j^e обчислюються за допомогою нової швидкості $\mathbf{u}^e$. Це скоригована швидкість, яка включає зовнішні сили. За відсутності зовнішніх сил, $\mathbf{u}^e = \mathbf{u}$. На основі скоригованої швидкості маємо

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{u},$$

$$f_j^e = \psi_j \rho \left[1 + \frac{3(e_j \cdot \mathbf{u}^{eq})}{c^2} + \frac{9(e_j \cdot \mathbf{u}^{eq})^2}{2c^4} - \frac{3(\mathbf{u}^{eq})^2}{2c^2} \right],$$

де для двовимірної решітки *D2Q9*

$$w_j = \begin{cases} 4/9, & j = 0, \\ 1/9, & j = 1,2,3,4, \\ 1/36, & j = 5,6,7,8 \end{cases}$$

та

$$e_j = \begin{cases} (0,0), & j = 0, \\ (1,0)c, (0,1)c, (-1,0)c, (0,-1)c, & j = 1,2,3,4 \\ (1,1)c, (-1,1)c, (-1,-1)c, (1,-1)c, & j = 5,6,7,8 \end{cases}.$$

Для тривимірної решітки *D3Q15* маємо

$$w_j = \begin{cases} 2/9, & j = 0, \\ 1/9, & j = 1,2,\ldots,6, \\ 1/72, & j = 7,8,\ldots,14. \end{cases}$$

та

$$e_j = \begin{cases} (0,0,0), & j = 0, \\ (\pm 1,0,0)c,\ (0,\pm 1,0)c,\ (0,0,\pm 1)c, & j = 1,2,\ldots,6, \\ (\pm 1,\pm 1,\pm 1)c, (\pm 1,\pm 1,\mp 1)c, (\pm 1,\mp 1,\pm 1)c, (\mp 1,\pm 1,\pm 1)c, & j = 7,8,\ldots,14. \end{cases}.$$

Надалі використовуватимо підхід, сформульований у роботі [107], для моделювання нестисливого потоку в мікроканалі в умовах накладеного градієнта тиску. З цією метою буде використано поняття псевдонестислової рідини. Введемо щільність вузла

$$\rho = \frac{p}{c_s^2 \rho_*},$$

де ρ_* - постійна щільність нестисливого середовища,

$$c_s = c/\sqrt{3}$$

- "швидкість звуку".

Рівноважний розподіл енергії визначається як [106]

$$f_{T,j}^e = \begin{cases} -\dfrac{\rho R_g T \mathbf{u}^2}{2c^2}, \; j = 0 \\ \dfrac{\rho R_g T}{6}\left[1 + \dfrac{e_j \cdot \mathbf{u}}{c^2} + \dfrac{9(e_j \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \dfrac{3\mathbf{u}^2}{2c^2}\right], \; j = 1...6 \\ \dfrac{\rho R_g T}{48}\left[3 + \dfrac{7(e_j \cdot \mathbf{u})}{c^2} + \dfrac{9(e_j \cdot \mathbf{u})^2}{2c^4} - \dfrac{3\mathbf{u}^2}{2c^2}\right], \; j = 7...14 \end{cases}.$$

Час релаксації, що використовується при моделюванні мікротоків, визначається за допомогою числа Кнудсена. Безрозмірний час релаксації як функції числа Кнудсена можна виразити як [107]

$$\begin{aligned} \tau &= \mathrm{Kn} N_n + \frac{1}{2} \\ \tau_T &= \frac{\mathrm{Kn}}{\mathrm{Pr}} N_n + \frac{1}{2} \end{aligned},$$

де N_n кількість елементів у гратчастій колоні по каналу.

Температура T_w, а також компоненти швидкості проковзування частинок на стінці u_w та w_w визначаються граничними умовами другого порядку (4.3.1, 4.3.2) і можуть бути виражени співвідношеннями

$$
\begin{aligned}
u_w &= \mathrm{Kn}\, N_n \frac{(1-2A_2\mathrm{Kn}\, N_n)u_1 + A_2\mathrm{Kn}\, N_n u_2}{1+\mathrm{Kn}\, N_n(1-A_2\mathrm{Kn}\, N_n)}, \\
w_w &= \mathrm{Kn}\, N_n \frac{(1-2A_2\mathrm{Kn}\, N_n)w_1 + A_2\mathrm{Kn}\, N_n w_2}{1+\mathrm{Kn}\, N_n(1-A_2\mathrm{Kn}\, N_n)}, \\
T_w &= \mathrm{Kn}\, N_n \frac{(1-2\mathrm{Kn}\, N_n)T_1 + A_2\mathrm{Kn}\, N_n T_2}{\mathrm{Pr}+\mathrm{Kn}\, N_n(1-A_2\mathrm{Kn}\, N_n)},
\end{aligned}
\qquad (2.2.11)
$$

де T_1, T_2, u_1, u_2, w_1, w_2 - температури, x - компоненти та z - компоненти швидкості в осередках, відокремлених від стінної комірки на один та два ступені по осі y відповідно. Враховуючи значення $A_2 = 0$, граничні умови (2.2.11) зводяться до граничних умов першого порядку.

Макропараметри, зазначені в граничних умовах, повинні бути пов'язані з мікропараметрами, які беруть участь у функції розподілу. Ми говоримо про наступні граничні умови: швидкість проковзування на стінці та періодичні граничні умови для входу / виходу.

Періодичні граничні умови накладаються в потоковому напрямку; для цього вхідні / вихідні комірки вважаються безпосередніми сусідами. Цим самим встановлення періодичних умов включається в операцію потоку, тоді як обчислені розподіли на виході з решітки використовуються згодом на вході як граничні умови. У цьому випадку вимога збереження масового потоку задовольняється.

Граничні умови залежать від кута між стінкою - ортогональним в напрямку осі y, як видно за годинниковою стрілкою. З огляду на дискретні напрямки руху всередині решітки, ми можемо виділити 8 груп граничних умов на стінці (рис. 2.2.2). Відповідність граничних умов та відповідних (поки невідомих) функцій розподілу показано в таблиці 2.2.1.

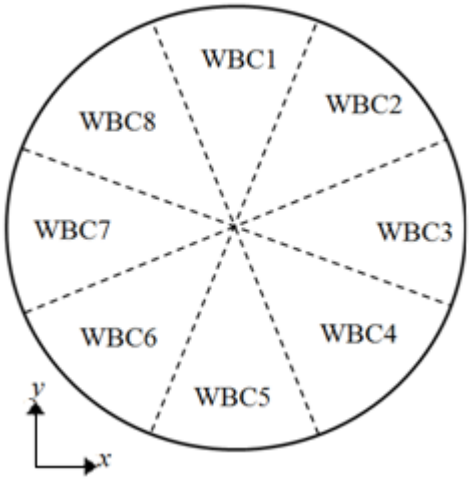


Рис. 2.2.2 Групи граничних умов на стінці

Таблиця 2.2.1. Групи границь та відповідно невідомих функцій розподілу

Групи границь	Невідомі функції розподілу
WBC1	$f_4, f_8, f_{10}, f_{11}, f_{13}$; $f_{T,4}, f_{T,8}, f_{T,10}, f_{T,11}, f_{T,13}$
WBC2	f_4, f_6, f_8, f_{10}; $f_{T,4}, f_{T,6}, f_{T,8}, f_{T,10}$
WBC3	$f_2, f_8, f_{10}, f_{12}, f_{14}$; $f_{T,2}, f_{T,8}, f_{T,10}, f_{T,12}, f_{T,14}$
WBC4	f_2, f_3, f_{12}, f_{14}; $f_{T,2}, f_{T,3}, f_{T,12}, f_{T,14}$
WBC5	$f_3, f_7, f_9, f_{12}, f_{14}$; $f_{T,3}, f_{T,7}, f_{T,9}, f_{T,12}, f_{T,14}$
WBC6	f_1, f_3, f_7, f_9; $f_{T,1}, f_{T,3}, f_{T,7}, f_{T,9}$
WBC7	$f_1, f_7, f_9, f_{11}, f_{13}$; $f_{T,1}, f_{T,7}, f_{T,9}, f_{T,11}, f_{T,13}$
WBC8	f_1, f_4, f_{11}, f_{13}; $f_{T,1}, f_{T,4}, f_{T,11}, f_{T,13}$

Невідомі функції розподілу молекулярної щільності обчислюються за методологією, викладеною у статті [107], використовуючи рівняння (2.2.11). Наприклад, для групи меж WBC1 співвідношення для невідомих функцій розподілу молекулярної щільності виглядають так

$$f_4 = f_3,$$
$$f_8 = f_{14} + \frac{1}{2}(f_6 - f_5 - 2f_7) + f_9,$$
$$f_{10} = \frac{1}{2}\left[f_1 - 2f_{14} - f_2 + f_5 - f_6 + 4f_7 - u_w\left(f_0 + f_1 + f_2 + 2f_3 + f_5 + f_6 + 2f_{12} + 2f_{14} + 2(f_7 + f_9)\right)\right].$$
$$f_{11} = f_7,$$
$$f_{13} = \frac{1}{2}\left[-f_1 + 2f_{12} + 2f_{14} + f_2 - 2f_7 + u_w\left(f_0 + f_1 + 2f_{12} + 2f_{14} + f_2 + 2f_3 + f_5 + f_6 + 2(f_7 + f_9)\right)\right]$$

Невідомі функції розподілу щільності енергії записуються як

$$f_{T,i} = f_{T,i}^e + w_i \mathrm{K}_c,$$

де K_c поправочний коефіцієнт для обчислення внутрішньої енергії [108]. Форма рівняння, що визначає поправочний коефіцієнт, є індивідуальною для кожної конкретної групи граничних умов. Наприклад, поправочний коефіцієнт для групи WBC1 (рис. 2.2.2) задається як

$$\mathrm{K}_c = \frac{\rho(\varepsilon - \varepsilon^*)}{w_4 + w_8 + w_{10} + w_{11} + w_{13}},$$

де

$$\varepsilon^* = \frac{\sum_j f_{T,j}^e}{\rho}.$$

Похідна на стінці визначається граничною умовою Неймана (де n - безрозмірний ортогональний вектор, пов'язаний із кроком гратки). Тому температура стінки записується як

$$T_w = \frac{2}{3}\frac{\partial T}{\partial n} + \frac{4}{3}T' - \frac{1}{3}T'',$$

де T' і T'' - температури двох клітин, розташованих поруч із сусідньою до стінки клітиною і через одну з неї відповідно. Отже, температура рідини на стінці задається як

$$T_{wf} = \frac{T'(\mathrm{Kn/Pr})N_n + T_w}{(1+(\mathrm{Kn/Pr})N_n)}.$$

Потік в мікроканалі в двовимірному викладі моделювали за допомогою решітки *D2Q9* (Рис. 2.2.1а), що складається з 40 × 600 комірок, тоді як для обчислення круглого мікроканалу за допомогою тривимірної решітки *D3Q15*, що складається з 40 × 40 × 600 комірок (Рис. 2.2.1б). В обох випадках було обрано критерій конвергенції різниці між значеннями швидкості на виході для послідовних етапів ітерації, що становить менше 0,1%. Комп'ютерні коди в рамках цього дослідження були створені за допомогою розв'язувача LBM з відкритим кодом "Palabos", розповсюдженого за загальною публічною ліцензією GNU Affero (www.palabos.org)

Фактично, чисельне моделювання було перевірено шляхом порівняння з аналітичними результатами.

2.3. Метод ренормалізаційно групового аналізу

Одним із способів дослідження фізичних особливостей течій в пористих середовищах використовується $k-\varepsilon$ модель турбулентності, яка отримана на основі ренормалізаційно - групового методу (RNG). Суть методу полягає в тому, що визначається усереднений вплив дрібномасштабних (високочастотних) мод на великомасштабні за допомогою ітераційного усереднення по вузькій смузі спектра хвильових чисел дрібномасштабних мод. Усереднений вплив зводиться до ренормалізації (перенормування) параметрів, що характеризують систему. В даному випадку, тобто при дослідженні турбулентності, такими параметрами є ефективна в'язкість і амплітуда ефективних випадкових сил [109]. Теорія RNG дає можливість виявити фізичну сутність впливу нелінійної складової Форхаймера. При

моделюванні турбулентного потоку система рівнянь для руху та теплообміну з урахуванням пористості повинна бути замкнута моделлю турбулентності. В результаті отримана модель турбулентності для пористих середовищ дає можливість отримати модифікований вираз для ренормалізованної ефективної в'язкості.

Рівняння руху потоку з урахуванням пористого середовища в дивергентній формі має вигляд

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_0\frac{\varphi}{K}-J\nu_0\nabla^2\right)u_n = f_n-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_n}+\frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m}-\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}|\mathbf{V}|u_n \qquad (2.3.1)$$

де f_n - зовнішня соленоідальна сила, що представляє собою гаусовский білий шум, $H=\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}$, J = μ_e/μ - співвідношення в'язкостей і V - вектор швидкості. Зовнішня сила f_n генерує поле швидкостей зі спектром Колмогорова [110]

$$E = C_K\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$$

где C_K = 1,3 ÷ 2,3 - константа Колмогорова. Проекція вектора швидкості на осі координат описується виразом

$$u_n = \left|\vec{\mathbf{V}}\right|\cos\left(\mathbf{V}\hat{u}_n\right) = |\mathbf{V}|s_n, \qquad (2.3.2)$$

де s_n – направляючий косінус. Використовуючи (2.3.2), перетворюємо вираз (2.3.1) до виду

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\nu_0\frac{\varphi}{K}-J\nu_0\nabla^2\right)u_n = f-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_n}+\frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m}-Hs_n u_m^2. \qquad (2.3.3)$$

Процедуру перенормування починаємо з молекулярної в'язкості ν_0 у виразі (2.3.3). Для цього застосовуємо перетворення Фур'є до параметрів швидкості, тиску та сили

$$u_n = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\kappa \le \kappa_c} d^d \kappa \int d\omega \mathrm{U}_n(\vec{\kappa}, \omega) \exp\left(i\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - i\omega t\right),$$

$$p = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\kappa \le \kappa_c} d^d \kappa \int d\omega \mathrm{P}(\vec{\kappa}, \omega) \exp\left(i\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - i\omega t\right),$$

$$u_n u_m = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\kappa \le \kappa_c} d^d \kappa \int d\omega \mathrm{W}_{nm}(\vec{\kappa}, \omega) \exp\left(i\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - i\omega t\right), \qquad (2.3.4)$$

$$f_n = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\kappa \le \kappa_c} d^d \kappa \int d\omega F_n(\vec{\kappa}, \omega) \exp\left(i\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - i\omega t\right),$$

$$s_n = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\kappa \le \kappa_c} d^d \kappa \int d\omega S_n(\vec{\kappa}, \omega) \exp\left(i\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - i\omega t\right),$$

$$u_n u_m = \frac{1}{(2\pi)^{d+1}} \int_{\kappa \le \kappa_c} d^d \kappa \int d\omega \mathrm{W}_{s_n u^2}(\vec{\kappa}, \omega) \exp\left(i\vec{\kappa} \cdot \vec{x} - i\omega t\right),$$

де $\vec{\kappa}$ — вектор хвильового числа, $\vec{x}$ — вектор координати точки, d — розмірність простору, W_{nm}, $\mathrm{W}_{s_n u^2}$ — Фур'є - образ добутку двох компонент швидкості. В виразах (2.3.4) κ_c є величина верхньої межі в просторі хвильових чисел. При цьому введемо припущення, що моди швидкості зникають при хвильових числах, що перевищують κ_c [111], тобто при цьому відкидається вплив дрібномасштабних мод, що призводить до заміни молекулярної в'язкості ν_0 на деяке, залежне від верхньої межі, перенормоване значення $\nu_0 = \nu_0(\kappa_c)$.

Підставимо отримані вирази (2.3.4) в (2.3.3) та проведемо операцію диференціювання. Так як значення отриманого інтеграла дорівнює нулю, то нулю має дорівнювати і підінтегральний вираз. З урахуванням скорочення експоненціального члена отримаємо

$$G_0^{-1} U_n = F_n - i\kappa_n \frac{P}{\rho} - i\kappa_m W_{nm} - H W_{s_n u^2} \qquad (2.3.5)$$

де

$G_0 = \left(-i\omega + \frac{\nu_0}{K} + J\nu_0\kappa^2 \right)^{-1}$ – пропагатор нульового порядку, $\kappa^2 = \sum_{j=1}^{d} \kappa_j^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + ... + \kappa_{d_n}^2$.

Наступним кроком виключимо з (2.2.5) Фур'є - образи P, W_{nm} $W_{s_n u^2}$ використовуючи методику з роботи [112]. Для цього застосуємо операцію дивергенції до рівняння (2.3.3) у векторній формі з урахуванням соленоідальності *f*. В результаті цієї операції отримаємо рівняння

$$G_0^{-1}(\kappa,\omega)U_n(\kappa,\omega) = F_n(\kappa,\omega) - \lambda_0 \left(M_{nml}(\kappa) \int_{\kappa \le \kappa_c} \frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d} \int \frac{d\varpi}{2\pi} U_m(\sigma,\varpi) U_l(\kappa-\sigma,\omega-\varpi) \right.$$
$$\left. - HM_{nh}(\kappa) \int\int_{\kappa \le \kappa_c} \frac{d^d\sigma d^d\beta}{(2\pi)^{2d_n}} \int\int \frac{d\varpi d\chi}{(2\pi)^2} S_h(\beta,\chi) U_r(\sigma,\varpi) U_r(\kappa-\sigma-\beta,\omega-\varpi-\chi) \right), \quad (2.3.6)$$

де $M_{nml} = \frac{1}{2i}(\kappa_m M_{nl} + \kappa_l M_{nm})$ та $M_{nl} = \delta_{nl} - \frac{\kappa_n \kappa_l}{\kappa^2}$ - оператор поперечного проектування.

Кореляційна функція ефективних випадкових сил F_n визначається при процедурі ε*- розкладу та має вигляд

$$\langle F_n(\mathbf{\kappa},\omega) F_m(\mathbf{\kappa}',\omega') \rangle = \frac{2(2\pi)^{d+1}}{\kappa^{d-4+\varepsilon^*}} D_0 M_{nm}(\mathbf{\kappa}) \delta(\mathbf{\kappa}+\mathbf{\kappa}') \delta(\omega+\omega').$$

Дельта-функція Дірака δ гарантує статистичну однорідність кореляційної функції в просторі і часі. Величина D_0 пропорційна швидкості дисипації енергії ε, а параметр ε*=4.

Наступним етапом ренормалізаційного аналізу є розбиття полів швидкості і сили на швидкі і повільні моди

$$U(\vec{\kappa},\omega) = \begin{cases} U^<(\kappa,\omega) & 0 < \kappa < \kappa_c \exp(-\tau) \\ U^>(\kappa,\omega) & \kappa_c \exp(-\tau) < \kappa < \kappa_c, \end{cases} \quad (2.3.7)$$

$$F(\vec{\kappa},\omega)=\begin{cases}F^{<}(\kappa,\omega) & 0<\kappa<\kappa_c\exp(-\tau)\\ F^{>}(\kappa,\omega) & \kappa_c\exp(-\tau)<\kappa<\kappa_c,\end{cases} \qquad (2.3.8)$$

де τ – позитивний параметр, $U^{<}$ и $F^{<}$ – повільні моди, а $U^{>}$, та $F^{>}$ – швидкі моди. Підставляючи (2.3.7), (2.3.8) у (2.3.6), отримаємо вираз для швидких мод

$$\begin{aligned}&G_0^{-1}(\kappa,\omega)U_n^{>}(\kappa,\omega)=\\ &F_n^{>}(\kappa,\omega)+\lambda_0\Bigg(M_{nml}^{>}(\kappa)\int_{\kappa\le\kappa_c}\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\int\frac{d\varpi}{2\pi}\Big[U_m^{<}(\sigma,\varpi)U_l^{<}(\kappa-\sigma,\omega-\varpi)+\\ &2U_m^{<}(\sigma,\varpi)U_l^{>}(\kappa-\sigma,\omega-\varpi)+U_m^{>}(\sigma,\varpi)U_l^{>}(\kappa-\sigma,\omega-\varpi)\Big]-\\ &HM_{nh}^{>}(\kappa)\iint_{\kappa\le\kappa_c}\frac{d^d\sigma d^d\beta}{(2\pi)^{2d}}\iint\frac{d\varpi d\chi}{(2\pi)^2}S_h(\beta,\chi)\Big[U_r^{<}(\sigma,\varpi)U_r^{<}(\kappa-\sigma-\beta,\omega-\varpi-\chi)+\\ &+2U_r^{<}(\sigma,\varpi)U_r^{>}(\kappa-\sigma-\beta,\omega-\varpi-\chi)+U_r^{>}(\sigma,\varpi)U_r^{>}(\kappa-\sigma-\beta,\omega-\varpi-\chi)\Big]\Bigg)\end{aligned} \qquad . \qquad (2.3.9)$$

Вираз для повільних мод отримуємо аналогічно. Для виключення швидких мод з рівняння (2.3.9) можна застосувати теорію збурень для швидких мод. Тоді вираз для швидких мод запишемо в наступному вигляді

$$U^{>}(\tilde{\kappa})=\sum_{s=0}^{\infty}\lambda_0^s U_s^{>}(\tilde{\kappa})\ , \qquad (2.3.10)$$

де $\tilde{\kappa}=(\vec{\kappa},\omega)$. Нижні числові індекси позначають порядок в ряді збурень.

Параметр λ_0 введений для зручності при побудові теорії збурень. В остаточному результаті слід прийняти λ_0 = 1. Підставимо (2.3.10) у вираз для швидких мод і прирівняємо члени при однакових ступенях λ_0.Член ряду при s = 1 описується виразом

$$U_{n1}^{>}(\tilde{\kappa}) = G_0(\tilde{\kappa})\Bigg(M_{nml}^{>}(\kappa)\int \frac{d\tilde{\sigma}}{(2\pi)^{d+1}}\Big[U_m^{<}(\tilde{\sigma})U_l^{<}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}) + 2U_m^{<}(\tilde{\sigma})U_{l0}^{>}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}) +$$

$$+U_{m0}^{>}(\tilde{\sigma})U_{l0}^{>}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma})\Big] - HM_{nh}^{>}(\kappa)\int \frac{d\tilde{\sigma}d\tilde{\beta}}{(2\pi)^{2d+2}} S_h(\tilde{\beta})\Big[U_r^{<}(\tilde{\sigma})U_r^{<}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}) + \qquad (2.3.11)$$

$$+2U_r^{<}(\tilde{\sigma})U_{r0}^{>}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}) + U_{r0}^{>}(\tilde{\sigma})U_{r0}^{>}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta})\Big]\Bigg).$$

Підставляючи (2.3.11) у (2.3.9), отримаємо

$$G_0^{-1}(\tilde{\kappa})U_n^{<}(\tilde{\kappa}) = F_n^{<}(\tilde{\kappa}) + \lambda_0\Bigg(M_{nml}^{<}(\kappa)\int \frac{d\tilde{\sigma}}{(2\pi)^{d+1}}\Big[U_m^{<}(\tilde{\sigma})U_l^{<}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}) + 2U_m^{<}(\tilde{\sigma})U_{l0}^{>}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}) +$$

$$U_{m0}^{>}(\tilde{\sigma})U_{l0}^{>}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma})\Big] - HM_{nh}^{<}(\kappa)\int \frac{d\tilde{\sigma}d\tilde{\beta}}{(2\pi)^{2d+2}} S_h(\tilde{\beta})\Big[U_r^{<}(\tilde{\sigma})U_r^{<}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}) +$$

$$2U_r^{<}(\tilde{\sigma})U_{r0}^{>}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}) + U_{r0}^{>}(\tilde{\sigma})U_{r0}^{>}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta})\Big]\Bigg) +$$

$$2\lambda_0^2\Bigg(M_{nml}^{<}(\kappa)\int \frac{d\tilde{\sigma}}{2\pi}\Big[U_m^{<}(\tilde{\sigma})U_{l1}^{>}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}) + U_{m0}^{>}(\tilde{\sigma})U_{l1}^{>}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma})\Big] -$$

$$HM_{nh}^{<}(\kappa)\int \frac{d\tilde{\sigma}d\tilde{\beta}}{(2\pi)^{2d+2}} S_h(\tilde{\beta})\Big[U_r^{<}(\tilde{\sigma})U_{r1}^{>}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}) + U_{r0}^{>}(\tilde{\sigma})U_{r1}^{>}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta})\Big]\Bigg) + O(\lambda_0^3),$$

Для виключення ефектів швидких мод використаємо правила усереднення при наступних умовах [113]:

$$\langle F^{<}\rangle = F^{<}, \qquad \langle U^{<}\rangle = U^{<}, ,$$

$$M_{nml}^{<}(\boldsymbol{\kappa})\langle U_{l0}^{>}(\tilde{\sigma})\mathrm{U}_{m0}^{>}(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma})\rangle = 0 .$$

$$\overline{\mathrm{F}^{>}} = 0, \qquad \overline{\mathrm{U}^{>}} = 0$$

Враховуючи, що збурююча сила підпорядковується гаусовському розподілу ймовірності, а отже $\langle F_l^{>}F_m^{>}F_n^{>}\rangle = 0$. Згідно з цим $\langle U_{l0}^{>}U_{m0}^{>}U_{n0}^{>}\rangle = 0$.

Вираз, з якого виключили швидкі моди перетворюється в

$$\left[-i\omega+\frac{\nu_0}{K}+J\left(\nu_0+\Delta\nu\right)\kappa^2\right]U_n^<\left(\tilde{\kappa}\right)=F_n^<\left(\tilde{\kappa}\right)+$$
$$\lambda_0\left[M_{nml}^<\left(\kappa\right)\int\frac{d\tilde{\sigma}}{\left(2\pi\right)^{d+1}}U_m^<\left(\tilde{\sigma}\right)U_l^<\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}\right)-HM_{nh}^<\left(\kappa\right)\int\frac{d\tilde{\sigma}d\tilde{\beta}}{\left(2\pi\right)^{2d+2}}S_h\left(\tilde{\beta}\right)U_r^<\left(\tilde{\sigma}\right)U_r^<\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)\right]+$$
$$\lambda_0^2\left[2M_{nml}^<\left(\kappa\right)\int\frac{d\tilde{\sigma}d\tilde{\upsilon}}{\left(2\pi\right)^{2d+2}}G_0\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}\right)M_{lts}^>\left(\kappa-\sigma\right)U_m^<\left(\tilde{\sigma}\right)U_t^<\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\upsilon}\right)U_s^<\left(\tilde{\upsilon}\right)-\right. \quad (2.3.12)$$
$$2HM_{nh}^<\left(\kappa\right)\left\{\int\frac{G_0\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)M_{rml}^>\left(\kappa-\sigma-\beta\right)d\tilde{\sigma}d\tilde{\beta}d\tilde{\upsilon}}{\left(2\pi\right)^{3d+3}}S_h\left(\tilde{\beta}\right)U_r^<\left(\tilde{\sigma}\right)U_m^<\left(d\tilde{\upsilon}\right)U_l^<\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)-\right.$$
$$\left.\left.H\int\frac{G_0\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)M_{nh}^>\left(\kappa-\sigma-\beta\right)d\tilde{\upsilon}d\tilde{\beta}d\tilde{\upsilon}}{\left(2\pi\right)^{3d+3}}S_h\left(\tilde{\beta}\right)U_r^<\left(\tilde{\sigma}\right)U_r^<\left(\tilde{\upsilon}\right)U_r^<\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}-\tilde{\upsilon}\right)\right\}\right]-\Delta N,$$

де

$$\Delta\nu\left(\tilde{\kappa}\right)=-8\lambda_0^2\kappa^{-2}J^{-1}D_0M_{sml}^<\left(\kappa\right)\int\frac{d\tilde{\sigma}}{\left(2\pi\right)^{d+1}}G_0\left(\tilde{\sigma}-\tilde{\kappa}\right)\frac{\left|G_0\left(\tilde{\sigma}\right)\right|^2M_{lts}^>\left(\kappa-\sigma\right)M_{mt}\left(\sigma\right)}{\sigma^{d-4+\varepsilon^*}}\ . \quad (2.3.13)$$

- поправка для ренормалізаційної молекулярної в'язкості, та

$$\Delta N=8\lambda_0^2HM_{rml}^<\left(\kappa\right)D_0$$
$$\int\frac{G_0\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}\right)\left|G_0\left(\tilde{\sigma}\right)\right|^2M_{nh}^>\left(\kappa-\sigma\right)M_{mr}\left(\sigma\right)d\tilde{\sigma}}{\left(2\pi\right)^{d+1}\sigma^{d-4+\varepsilon^*}}\int\frac{S_h\left(\tilde{\beta}\right)U_n^<\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\beta}\right)}{\left(2\pi\right)^{d+1}}d\tilde{\beta}\ . \quad (2.3.14)$$

- ренормалізована складова нелінійного опору Форхаймера. Оскільки параметри при $\lambda_0{}^2$ вироджуються, вираз (2.3.12) набуде вигляду

$$G^{-1}\left(\tilde{\kappa}\right)U_n^<\left(\tilde{\kappa}\right)=F_n^<\left(\tilde{\kappa}\right)+\lambda_0\left[M_{nml}^<\left(\kappa\right)\int\frac{d\tilde{\sigma}}{\left(2\pi\right)^{d+1}}U_m^<\left(\tilde{\sigma}\right)U_l^<\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}\right)-\right. \quad (2.3.15)$$
$$\left.HM_{nh}^<\left(\kappa\right)\int\frac{d\tilde{\sigma}d\tilde{\beta}}{\left(2\pi\right)^{2d+2}}S_h\left(\tilde{\beta}\right)U_r^<\left(\tilde{\sigma}\right)U_r^<\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\sigma}-\tilde{\beta}\right)\right],$$

де

$G(\tilde{\kappa})=\left[-i\left(\omega-\frac{\Delta N}{iU_n^{<}(\tilde{\kappa})}\right)+\frac{\nu_0}{K}+J\kappa^2(\nu_0+\Delta\nu)\right]^{-1}$ - ренормалізований пропагатор. На даному етапі були видалені з розгляду моди в інтервалі $\kappa_c'=\kappa_c\exp(-\tau)<\kappa<\kappa_c$, а їх вплив враховано введенням перенормованої в'язкості.

Для визначення турбулентного коефіцієнта кінематичної в'язкості з урахуванням пористості обчислюється інтеграл (2.3.13) по всьому спектру частот. Інтегрування відповідає підсумовуванню відрахувань підінтегральної функції в полюсах верхній півплощині. Розглянемо випадок $(K/\varphi)\to\infty$, коли дане співвідношення є умовою виникнення турбулентності в пористому середовищі. Для цього розкладаємо в ряд по (K/φ) вираз, отриманий після інтегрування (2.3.13). Таким чином отримаємо

$$\int\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\frac{M_{lth}^{>}(\kappa-\sigma)M_{mt}(\sigma)}{\sigma^{d-4+\varepsilon^*}}\times$$
$$\frac{(K/\varphi)^2}{\nu_0(1+J(K/\varphi)\sigma^2)\left[\nu_0(2+J(K/\varphi)(\kappa^2-2\kappa\sigma+2\sigma^2))-i(K/\varphi)\omega\right]}\approx\int\frac{d^d\sigma}{(2\pi)^d}\frac{M_{lth}^{>}(\kappa-\sigma)M_{mt}(\sigma)}{\sigma^{d+\varepsilon^*}}\times$$
$$\left[\frac{1}{2J^2}\left(1+\frac{\kappa\cdot\sigma}{\sigma}\right)-\frac{1}{J^3\sigma^2(K/\varphi)}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\kappa\cdot\sigma}{\sigma}\right)\right].$$

Далі необхідно взяти інтеграл по простору хвильових чисел, використовуючи відомі співвідношення [114]

$$\int\sigma_m\sigma_n f(\sigma)d^d\sigma=\frac{S_d}{d}\delta_{mn}\int f(\sigma)\sigma^{d+1}d\sigma$$

$$\int\sigma_k\sigma_l\sigma_m\sigma_n f(\sigma)d^d\sigma=\frac{S_d}{d(d+2)}(\delta_{kl}\delta_{mn}+\delta_{km}\delta_{\ln}+\delta_{kn}\delta_{lm})\int f(\sigma)\sigma^{d+3}d\sigma\quad.$$

В результаті інтегрування поправка до молекулярної в'язкості має вигляд

$$\Delta\nu=A_dJ^{-3}\frac{\lambda_0^2D_0}{\nu_0^2\kappa_c^{\varepsilon^*}}\frac{\exp(\varepsilon^*\tau)-1}{\varepsilon^*}-B_dJ^{-4}\frac{\lambda_0^2D_0}{\nu_0^2\kappa_c^{\varepsilon^*+2}(K/\varphi)}\frac{\exp((2+\varepsilon^*)\tau)-1}{2+\varepsilon^*},\qquad(2.2.16)$$

де

$$A_d = \frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{d-1}{2(d+2)}, \qquad B_d = \frac{S_d}{(2\pi)^d}\frac{d^2-d+3}{d(d+2)}.$$

Наступним кроком диференціюємо рівняння (2.2.15) по τ за умови $\tau \to 0$, тобто різницю між локальними хвильовими числами обрізання спрямовуємо до нуля. Враховуючи, що $d\tau = -\kappa_c'^{-1} d\kappa_c'$, отримаємо

$$\frac{d\nu}{d\kappa_c} = A_d J^{-3} \frac{\lambda_0^2 D_0}{\nu^2 \kappa_c^{1+\varepsilon^*}}\left(1 - \frac{2\varphi}{JK\kappa_c^2}\frac{d^2-d+3}{d(d-1)}\right). \qquad (2.2.17)$$

Враховуючи граничну умову $\nu(\infty) = 0$, інтегруючи рівняння (2.2.16), отримаємо вираз для ренормалізованої ефективної в'язкості з урахуванням пористості середовища

$$\nu = \left(\frac{3A_d D_0}{J^3 \kappa_c^{\varepsilon^*}}\left(\frac{1}{\varepsilon^*} - \frac{2\varphi}{JK\kappa_c^2(2+\varepsilon^*)}\frac{d^2-d+3}{d(d-1)}\right)\right)^{1/3}. \qquad (2.2.18)$$

Але для практичних розрахунків залежність ефективної в'язкості від хвильового числа складно визначити. Тому для виключення хвильового числа з формули (2.2.17) обчислюємо спектр енергії турбулентності. Підставляємо вираз для кореляційної функції ефективних випадкових сил та враховуючи (2.2.17) отримаємо

$$E(\kappa) = \frac{d-1}{2} J \left(\frac{\varepsilon^*}{3A_d}\right)^{1/3} \frac{S_d}{(2\pi)^d} D_0^{2/3} \kappa^{1-\frac{2\varepsilon^*}{3}} \left(1 - \frac{2\varphi\varepsilon^*}{JK\kappa^2(2+\varepsilon^*)}\frac{d^2-d+3}{d(d-1)}\right)^{-1/3}.$$

Далі встановимо зв’язок між D_0 та ε використовуючи (2.3.14)

$$2D_0 \frac{S_d}{(2\pi)^d} = \gamma\varepsilon = 1{,}575\varepsilon .$$

Приймаючи $\gamma = 4/3$, отримаємо

$$E(\kappa) = JC_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-\frac{5}{3}} \left(1 - \frac{\varphi}{JK\kappa^2} \frac{d^2 - d + 3}{d(d-1)}\right)^{-1/3}, \qquad (2.3.19)$$

де

$$C_K = \left(\frac{16(d+2)}{27}\right)^{1/3}.$$

Отже, вираз для кінетичної енергії турбулентності має вигляд

$$k = \int_{\kappa_c}^{\infty} E(\kappa) d\kappa = \frac{3}{2} JC_K \varepsilon^{2/3} \kappa_c^{-2/3} {}_2\mathrm{F}_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{\varphi}{JK\kappa_c^2} \frac{d^2 - d + 3}{d(d-1)}\right),$$

Використовуючи (2.3.18), виключимо хвильове число із (2.3.17). У випадку ε* = 4 и $K \to \infty$ – пористе середовище відсутнє - (2.3.18) перетворюється в закон Колмогорова. В результаті отримаємо

$$\nu_t = \nu_{t0} \left(1 - \frac{16(3 + (-1+d) d\varepsilon^* \varphi}{27 C_K^3 d(1+d) {}_2\mathrm{F}_1^3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{\varphi}{JK\kappa_c^2} \frac{d^2 - d + 3}{d(d-1)}\right) J^4 (2 + \varepsilon^*)} \frac{k^3}{K\varepsilon^2}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

В ході перенормовки доданка ΔN з виразу (2.3.14) отримаємо

$$\Delta N = -4H\,\frac{d^2-2}{d^2-d}\,\Delta\nu J i\kappa_m \int \frac{\mathrm{S}_m\left(\tilde{\beta}\right)U_n^{<}\left(\tilde{\kappa}-\tilde{\beta}\right)}{\left(2\pi\right)^{d+1}}\,d\tilde{\beta}\,.$$

Враховуючи всі отримані поправки та повертаючись з простору Фур'є-образів в фізичний простір, рівняння руху рідини в пористому середовищі має вигляд

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}+\frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_n}+\frac{\partial}{\partial x_m}\left[J\left(\nu_0+\nu_t\right)\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\right]-\varphi\frac{\nu_0}{K}u_n$$
$$-\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\left|\mathbf{V}\right|u_n+4\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\frac{d^2-2}{d^2-d}\nu_t J\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{u_m u_n}{\left|\mathbf{V}\right|}\,.$$

Як обговорювалось вище, для замикання моделі турбулентності необхідно рівняння для кінетичної енергії турбулентності і швидкості дисипації. Ренормалізацію проводимо таким же чином. Рівняння кінетичної енергії з урахуванням пористості має вигляд

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\bar{u}_n\frac{\partial k}{\partial x_n}=2\nu_t S_{nm}^2-J\varepsilon+\frac{\partial}{\partial x_n}\left[J\left(\nu_0+\frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_k}\right)\frac{\partial k}{\partial x_n}\right]-$$
$$2\nu_0\frac{\varphi}{K}k-2\varphi\frac{c_F}{\sqrt{K}}\left|\mathbf{V}\right|k+8\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\frac{d^2-2}{d^2-d}\nu_t Jk\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{u_m u_n}{\left|\mathbf{V}\right|},$$

де Pr_k – критерій Прандтля кінетичної енергії.

Рівняння для швидкості дисипації енергії в результаті перенормовки виглядає як

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\bar{u}_n\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_n}=2C_{1\varepsilon}\nu_t\frac{\varepsilon}{k}S_{nm}^2-C_{2\varepsilon}J\frac{\varepsilon^2}{k}+\frac{\partial}{\partial x_n}\left[J\left(\nu_0+\frac{\nu_t}{\mathrm{Pr}_\varepsilon}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_n}\right]-2\nu_0\frac{\varphi}{K}\varepsilon-2\nu_0\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\frac{\partial\left(\left|\mathbf{V}\right|u_n\right)}{\partial x_m}-$$
$$8\nu_0\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}\frac{d^2-2}{d^2-d}\frac{\partial u_n}{\partial x_m}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\nu_t J\frac{\partial}{\partial x_m}\frac{u_m u_n}{\left|\mathbf{V}\right|}\right),$$

де $\mathrm{Pr}_K = \mathrm{Pr}_\varepsilon$. Pr_K визначається виразом: $\left|\frac{\mathrm{Pr}_K^{-1} - \mathrm{A}}{1-\mathrm{A}}\right|^{\frac{\mathrm{A}+1}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}} \left|\frac{\mathrm{Pr}_K^{-1} + \mathrm{B}}{1+\mathrm{B}}\right|^{\frac{\mathrm{B}-1}{\mathrm{A}+\mathrm{B}}} = \frac{\nu_0}{\nu_t}$,

$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\frac{d-1}{d}\tilde{A}_d^{-1} J\varphi + 1} - 1\right)$, $\mathrm{B} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4\frac{d-1}{d}\tilde{A}_d^{-1} J\varphi + 1} + 1\right)$, $C_{1\varepsilon}$ = 1,42 и $C_{2\varepsilon}$ = 1,68.

2.4. Метод малих збурень

При прогнозуванні фізичних процесів фундаментальне значення має перехід ламінарної форми течії в турбулентну. В основі теоретичних досліджень, пов'язаних з нестійкістю, лежить уявлення, що ламінарна течія піддається впливу деяких малих збурень. У разі течії в трубі, наприклад, з умовами при вході в трубу, а в разі приграничного шару на обтічному тілі - з шорсткістю стінки, або з нерівномірністю зовнішньої течії. Головним завданням було встановлення того, чи загасають, або наростають збурення з плином часу. Загасання збурень мало означати, що основна течія стійка, наростання збурень - нестійка, і тому можливий перехід ламінарної течії в турбулентну. Передумовою для створення теорії нестійкості служило висунуте О. Рейнольдсом припущення: ламінарна течія після переходу через певну межу, тобто після досягнення числом Рейнольдса критичного значення, стає нестійкою і переходить в турбулентну [115]. Над математичним обґрунтуванням теорії нестійкості працювали багато вчених та багато положень цієї теорії підтверджені експериментальними дослідженнями [116].

Отже, одним з методів вивчення нестійкості ламінарної течії є метод малих збурень. При цьому рух течії розкладається на основний та збурений, накладений на основний. При цьому збурені складові руху сумісні з гідродинамічними рівняннями. Складові швидкості та тиску результуючого потоку мають вигляд

$$u = U + u',\ \upsilon = V + \upsilon'(t,x,y), w = W + w'(t,x,y),\ p = P(x) + p'(t,x,y). \quad (2.4.1)$$

де U, V, W, P - параметри основного незбуреного потоку, u', υ', w', p' - параметри збурень. У разі двовимірного основного нестисливого потоку складова швидкості U залежить від координати y, тобто $U=U(y)$, $V=W=0$ та $p = P(x)$. Так як збурений рух передбачається "малим", квадратичними членами можна знехтувати. Підставивши вирази (2.4.1) в рівняння Нав'є - Стокса , отримаємо наступну систему рівнянь

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} + \upsilon'\frac{dU}{dy} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu\nabla u', \\ &\frac{\partial \upsilon'}{\partial t} + U\frac{\partial \upsilon'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu\nabla^2\upsilon', \\ &\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon'}{\partial y} = 0. \end{aligned} \qquad (2.4.2)$$

Розглянемо ламінарний плин. На основну течію, спрямовану вздовж осі x зі швидкістю $U(y)$, накладається збурення, котре складається з окремих коливань. Кожне коливання становить собою хвилю, яка поширюється в напрямку осі x. Для двовимірних збурень вводимо функцію струму $\psi(x,y,t)$. Для функції струму окремого коливання візьмемо наступний комплексний вираз

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)},$$

де $\varphi = \varphi_r + i\varphi_i$ - комплексна амплітуда, залежна від координати y. Дійсна величина α пов'язана з довжиною хвилі збурення наступним співвідношенням

$$\lambda = \frac{2\pi}{\alpha}.$$

Комплексна величина β має вигляд

$$\beta = \beta_r + i\beta_i,$$

β_r - кругова частота коливання, β_i - коефіцієнт зростання. При $\beta_i < 0$, ламінарна течія стійка, при $\beta_i > 0$ має місце нестійкість. Вводимо величину c

$$c = \frac{\beta}{\alpha} = c_r + ic_i,$$

де c_r - швидкість поширення хвиль в напрямку осі x (фазова швидкість), а c_i також представляє величину, що дозволяє судити про загасання або наростання коливання. Взявши похідні від функції струму, знайдемо значення для складових швидкості

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi'(y)e^{i(\alpha x - \beta t)},$$

$$\upsilon' = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\alpha\varphi(y)e^{i(\alpha x - \beta t)}.$$

Підставимо ці значення в (2.4.2). Після процедури обезрозмірювання отримуємо лінійне диференціальне рівняння четвертого порядку щодо амплітуди $\varphi(y)$.

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = -\frac{i}{\alpha \,\mathrm{Re}}(\varphi'''' - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi), \qquad (2.4.3)$$

$c_i < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$

де $\mathrm{Re} = \frac{U_{\max}\delta}{\nu}$ - число Рейнольдса.

Це рівняння збурюючого руху є основою для аналізу стійкості ламінарної течії. Складові збурюючої швидкості на стінці та на великій відстані від стінки повинні бути рівні нулю.

$$u' = \upsilon' = 0, \varphi = 0, \varphi' = 0 \qquad \text{при } y=0, \qquad (2.2.4)$$

$$u' = \upsilon' = 0, \varphi = 0, \varphi' = 0 \qquad \text{при } y=\infty.$$

В результаті рішення задачі на власні значення - рішення диференціального рівняння збурюючого руху (2.4.3) з граничними умовами (2.4.4), головний інтерес представляє собою знаходження критичного числа Рейнольдса (межі стійкості), якщо основна течія *U(y)* задана. Рівняння (2.4.3) містить чотири параметри: Re, α, c_r, c_i. Число Рейнольдса та довжина хвилі збурюючого руху також задано. У такому випадку рішення дає для кожної пари значень Re, α власну функцію $\varphi(y)$ і комплексне власне значення $c = c_r + ic_i$. Величина c_r - фазова швидкість заданого наростання, а c_i визначає своїм знаком або наростання (c_i >0), або загасання (c_i < 0) збурень. При c_i < 0 задана течія стійка, при c_i > 0 – нестійка. Випадок c_i = 0 відповідає нейтральним збуренням.

При дослідженні нестійкості фундаментальне значення мають дві теореми Рейлі. Згідно з першою теоремою, профілі швидкостей, що мають точку перегину, нестійкі. А також, існування точки перегину у профілях швидкостей безпосередньо пов'язано з градієнтом тиску течії. Друга теорема говорить про те, що при перебігу в приграничному шарі швидкість поширення хвиль нейтральних збурень (c_i = 0) менше максимальної швидкості основної течії, тобто $c_r < U_{max}$. З обох теорем Рейлі випливає, що кривизна профілів швидкостей має дуже великий вплив на стійкість течії.

2.5. Висновки до розділу 2

В даному розділі розглянуто модифіковану математичну модель теплообміну та гідродинаміки в пласких та круглих мікроканалах та математичні методи їх аналізу. Система рівнянь, що входить в модель, враховує вплив пористості середовища і умови проковзування першого та другого порядку на теплові та гідродинамічні характеристики потоку.

Представлено алгоритм застосування методу грат Больцмана, який базується на дискретизації рівнянь Больцмана у наближенні BGK. При імітації потоку в пласкому каналі використовували двомірну гратку *D2Q9* з дев`ятьма напрямками швидкості, а для круглого каналу – *D3Q15* з п’ятнадцятьма напрямками швидкості. Також враховувались граничні умови першого та другого порядку та вплив пористості.

На основі ренормалізаційно групового методу приведено k-ε RNG модель турбулентності. При моделюванні турбулентного потоку основна система з урахуванням пористості замикається рівняннями для кінетичної енергії турбулентності та швидкості дисипації. Теорія RNG дає можливість виявити фізичну сутність впливу нелінійної складової Форхаймера. Цей метод дозволяє чисельно досліджувати процес течії в пористому середовищі і визначити турбулентні параметри потоку.

Метод збурень застосовується для вивчення гідродинамічної та теплової нестійкості. Метод збурень адаптовано для аналізу різноманітних видів гідродинамічної та теплової нестійкості, зокрема відцентрової.

РОЗДІЛ 3. НЕСТІЙКІСТЬ ПОТОКУ В ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ ТА МІКРОКАНАЛА Х

3.1. Лінійна нестійкість у пласкому мікроканалі

В пористому середовищі течія може носити як ламінарний, так і турбулентний характер в залежності від числа Рейнольдса (3.1.1) і параметрів пористого середовища (3.1.2), (3.1.3). Важливо знати умови і параметри, при яких один режим течії переходить в інший.

$$\mathrm{Re}_K = \frac{u_0 K}{\nu}, \tag{3.1.1}$$

$$\mathrm{Da} = \frac{K}{H^2}, \tag{3.1.2}$$

$$\Lambda = \varphi^{3/2} c_F \frac{u_\infty h}{\nu_f \sqrt{J}}. \tag{3.1.3}$$

В діапазоні Re_K від 0,1 до 1 ламінарний плин в пористому середовищі описується законом Дарсі, який показує, що при малих значеннях числа Рейнольдса гідравлічний опір є лінійною функцією швидкості.

З метою визначення критерію нестійкості розглянемо особливості динаміки потоку з проковзуванням в пористому середовищі, використовуючи двовимірну постановку задачі [117]. Як обговорювалось вище, динаміка потоку в пористому середовищі описується модифікованими рівняннями Нав'є Стокса та рівнянням нерозривності.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\nabla^2 u - \frac{\nu}{K}u, \tag{3.1.4}$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + u\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\nabla^2 \upsilon - \frac{\nu}{K}\upsilon, \tag{3.1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0. \tag{3.1.6}$$

Для визначення критеріїв гідродинамічної нестійкості розрідженого середовища також використовуємо метод малих лінійних збурень. Основні параметри течії представимо у вигляді суми основних (незбурених) і малих (збурених) параметрів.

$$u = U(y) + u'(t,x,y),\ \upsilon = \upsilon'(t,x,y,z),\ p = P(x) + p'(t,x,y,z). \tag{3.1.7}$$

Підставляючи (3.1.7) в (3.1.4) - (3.1.6) і провівши процедуру ліанірізації, отримаємо наступну систему рівнянь для збуреного потоку

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U\frac{\partial u'}{\partial x} + \upsilon'\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu\Delta u', \tag{3.1.8}$$

$$\frac{\partial \upsilon'}{\partial t} + U\frac{\partial \upsilon'}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} + \nu\Delta \upsilon', \tag{3.1.9}$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon'}{\partial y} = 0. \tag{3.1.10}$$

Метод малих збурень передбачає, що збурені швидкість та тиск пропорційні хвилі $\exp i(\alpha x - \beta t)$. Функція струму збуреної швидкості визначається з виразів

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y},\ \upsilon' = -\frac{\partial \psi}{\partial x},\ \psi = \varphi(y)\exp[i(\alpha x - \beta t)], \tag{3.1.11}$$

де $\psi(y)$ - функція струму. Підставимо (3.1.11) в (3.1.8) - (3.1.10). Після цієї підстановки продиференцюємо *x*-вую компоненту рівняння руху по *y*, а *y*-вую компоненту по *x*. Після процедури диференціювання віднімемо *y*-вую компоненту від *x*-вой. В ході цих операцій виключено тиск.

Введемо безрозмірні параметри

$$M = (\mathrm{Da})^{-1/2};\ \mathrm{Da} = \frac{K}{h^2},\ \mathrm{Re} = \frac{u_\infty h}{\nu};\ \tilde{\alpha} = \alpha h;\ \tilde{U} = \frac{u}{u_\infty};\ \tilde{c} = \frac{\beta}{\alpha u_\infty};\ \varphi = \frac{\varphi}{u_\infty h}.$$

Далі проведемо процедуру обезрозмірювання отриманого виразу. У підсумку маємо:

$$\left(\tilde{U}-\tilde{c}\right)\left(\varphi''-\tilde{\alpha}^2\varphi\right)-\tilde{U}''\varphi=-\frac{i}{\tilde{\alpha}\,\mathrm{Re}}\left(\varphi''''-2\tilde{\alpha}^2\varphi''+\tilde{\alpha}^4\varphi\right)-\frac{i}{\tilde{\alpha}M\,\mathrm{Re}}\left(\tilde{\alpha}^2\varphi-\varphi''\right). \quad (3.1.12)$$

У випадку $\mathrm{Da}\to\infty$ рівняння (3.1.12) перетворюється в класичне рівняння Орра-Зоммерфельда.

Для визначення критеріїв гідродинамічної нестійкості необхідно дослідити рівняння (3.1.12) на власні значення. Граничні умови збуреної швидкості на стінці мають вигляд

$$\left.\left(\frac{d\varphi}{\partial\tilde{y}}\pm\mathrm{Kn}\frac{d^2\varphi}{d\tilde{y}^2}\right)\right|_{\tilde{y}=\pm1}=0.$$

Профіль швидкості основної течії було отримано в роботі [118] та має вигляд

$$\tilde{U}=\frac{\delta\cosh(M)-\cosh(M\tilde{y})}{\delta\cosh(M)-1}$$

де $\delta=1+\mathrm{Kn}M\tanh(M)$.

Задача на власні значення для рівняння (3.1.12) вирішувалася методом колокацій. Наближення Гальоркіна для амплітуди швидкості взято в наступному вигляді [119]

$$\varphi=\sum_{j=1}^{N}\tilde{\alpha}_j f_j(\tilde{y}).$$

Пробні функції вибираються в наступному вигляді

$$f_i(\tilde{y}) = \left(1-\tilde{y}^2\right)\left(1-\tilde{y}^2 \Big/ \left(1+\frac{4\mathrm{Kn}}{-1-3\mathrm{Kn}+4j\mathrm{Kn}}\right)\right)\tilde{y}^{2(j-1)},$$

або

$$f_j(\tilde{y}) = \left(1-\tilde{y}^2\right)\left(1-\tilde{y}^2 \Big/ \left(1+\frac{4\mathrm{Kn}}{-1-3\mathrm{Kn}+4j\mathrm{Kn}}\right)\right)T_{2j}(\tilde{y}).$$

де $T_j(\tilde{y})$ - поліноми Чебишева першого роду, які визначаються з

$$T_0(\tilde{y}) = 1, \tag{3.1.13}$$

$$T_1(\tilde{y}) = \tilde{y}, \tag{3.1.14}$$

$$T_{j+1}(\tilde{y}) - 2\tilde{y}T_j(\tilde{y}) + T_{j-1}(z) = 0, \ (-1 \le y \le 1).$$

Для верифікації методики дослідження рівняння (3.1.12) було проведено тестові розрахунки для плаского каналу для течії чистої рідини ($\mathrm{Da} \to \infty$) та при Kn = 0. При цьому профіль незбуреної швидкості визначався рівнянням

$$\tilde{U} = 1-\tilde{y}^2.$$

Розрахунки показали, що $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 5772$, це відповідає більш раннім дослідженням [120].

Далі було проведено порівняння результатів розрахунку на основі рівняння (3.1.12) з даними роботи [121] для чистого потоку ($\mathrm{Da} \to \infty$) при врахуванні проковзування. Результати порівняння представлені на рис.1, який показує гарне узгодження

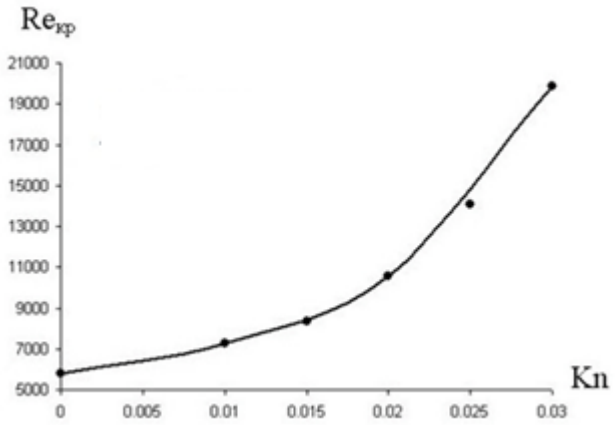


Рис.3.1.1. Порівняння результатів розрахунку на основі (3.1.12) при $M = 0$

Також результати тестових розрахунків показали, що при $N = 500$ відмінність критичних значень чисел Рейнольдса при використанні пробних функцій (3.1.13) і (3.1.4) становить менше 0,3%.

На основі запропонованої математичної моделі були отримані розрахункові дані критичних параметрів стійкості ламінарної течії розрідженого потоку в пористому середовищі при різних наборах значень параметра M і числа Кнудсена.

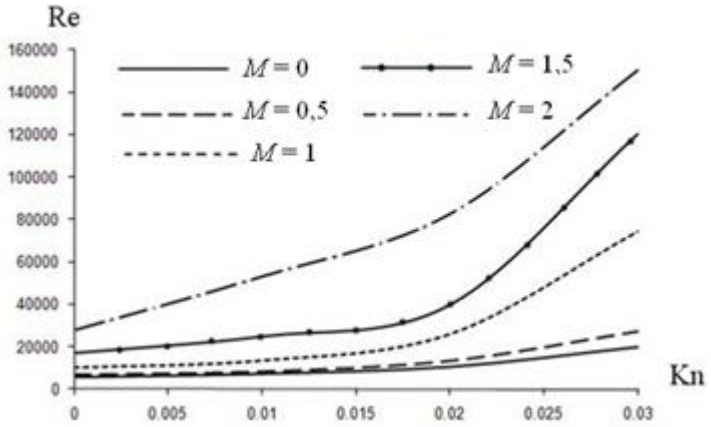


Рис.3.1.2. Залежність критичного числа Рейнольдса від числа Кнудсена при різних значеннях параметра M.

Згідно рисунку 3.1.2, збільшення числа Кнудсена і параметра M призводить до стабілізації потоку (критичне число Рейнольдса зростає). Такий ефект обумовлений тим, що при збільшенні M і Kn збільшується ступінь заповнювання профілю

швидкості і це, відповідно до другої теореми Релея про стійкість руху потоку [115], веде до стабілізації течії і до зростання значення критичного числа Рейнольдса.

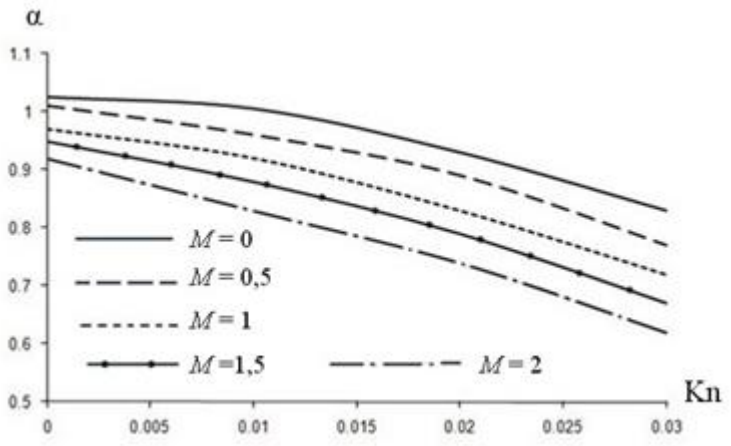


Рис.3.1.3 Залежність критичного хвильового числа від числа Кнудсена при різних значеннях параметра *M*

Рисунок 3.1.4 демонструє, що збільшення числа Кнудсена і параметра, що враховує пористість (*M*), призводить до зменшення критичного хвильового числа. Це вказує на те, що критична довжина хвилі збурення збільшується. Тобто довгохвильові обурення є більш небезпечними для стійкості потоку.

Розглянемо аналіз нестійкості течії без проковзування на основі тривимірних збурень в пласкому каналі, висота якого *h* [122]. Основна течія спрямована вздовж осі *x*. Ось *y* спрямована перпендикулярно основної течії. Так як розглядається плаский канал, то в напрямку осі *z* осереднені параметри потоку не змінюються. Динаміка потоку в пористому середовищі описується системою модифікованих диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса та рівняння нерозривності. Ця система рівнянь включає члени, що враховують гідравлічний опір, викликаний пористістю середовища.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu_t\nabla^2 u+\nu_f\frac{\varphi}{K}u-\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}|V|u, \tag{3.1.15}$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+w\frac{\partial \upsilon}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu_t\nabla^2 \upsilon+\nu_f\frac{\varphi}{K}\upsilon-\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}|V|\upsilon, \tag{3.1.16}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu_t\nabla^2 w+\nu_f\frac{\varphi}{K}w-\varphi^2\frac{c_F}{\sqrt{K}}|V|w, \tag{3.1.17}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{3.1.18}$$

Використовуючи метод лінійних збурень, знаходимо критерії гідродинамічної нестійкості. Параметри потоку мають вигляд

$$u=U(y)+u'(t,x,y,z),\ \upsilon=\upsilon'(t,x,y,z), \tag{3.1.19}$$

$$w=w'(t,x,y,z),\ p=P(x)+p'(t,x,y,z), \tag{3.1.20}$$

де U, P - параметри основного незбуреного потоку, u',υ',w',p' - параметри збурень. Величини, що визначають незбурений потік $u=U(y),\upsilon=w=0$, $p=P(x)$. Рівняння (3.1.19), (3.1.20) підставляємо в систему диференційних рівнянь (3.1.15) – (3.1.18). Квадратичні члени щодо компонентів швидкості збурюючого руху відкидаємо. Параметри збурених величин можуть бути представлені у вигляді таких функцій

$$u'=u_1(y)\exp i(\alpha x+\gamma z-\beta t),$$
$$\upsilon'=\upsilon_1(y)\exp i(\alpha x+\gamma z-\beta t),$$
$$w'=w_1(y)\exp i(\alpha x+\gamma z-\beta t),$$
$$p'=p_1(y)\exp i(\alpha x+\gamma z-\beta t),$$

де β - це комплексна величина і може бути представлена у формі $\beta=\beta_r+i\beta i$, де β_r - кругова частота окремого коливання, β_i - коефіцієнт зростання, α та γ - хвильові числа, u_1,υ_1,w_1,p_1 - амплітуди. У процесі математичних перетворень амплітуди були виключені та отримано рівняння четвертого порядку

$$-\frac{\Lambda M\tilde{\upsilon}_1'}{\tilde{\alpha}}+\tilde{\upsilon}_1'\left(-i\tilde{c}\tilde{k}^2+\frac{\tilde{k}^4}{\mathrm{Re}\,\tilde{\alpha}}+\frac{\tilde{k}^2M^2}{\mathrm{Re}\,\tilde{\alpha}}i\tilde{k}^2\tilde{U}+\frac{\Lambda M}{\tilde{\alpha}}i\tilde{U}''\right)+$$
$$\tilde{\upsilon}_1''\left(i\tilde{c}-\frac{2\tilde{k}^2}{\mathrm{Re}\,\tilde{\alpha}}-\frac{M^2}{\mathrm{Re}\,\tilde{\alpha}}-i\tilde{U}-\frac{\Lambda M}{\tilde{\alpha}}\right)+\frac{\tilde{\upsilon}''''}{\mathrm{Re}\,\tilde{\alpha}}=0, \qquad (3.1.21)$$

де штрих означає диференціювання по $\tilde{y}$. В рівнянні (3.1.21) $M=(\mathrm{Da})^{-1/2}$, $\tilde{y}=y/h$, $k^2=\alpha^2+\gamma^2$, $\tilde{\alpha}=\alpha h$, $\tilde{k}=kh$, $\tilde{U}=U/u_\infty$, $\tilde{c}=\beta/\alpha u_\infty$, $\tilde{\upsilon}=\upsilon/\alpha u_0, u_\infty$ - швидкість в центрі каналу.

Якщо визначити $M=\Lambda=0$, то рівняння (3.1.21) буде співпадати з класичним рівнянням нестійкості для чистої рідини.

Щоб визначити критерій гідродинамічної нестійкості, дослідимо рівняння (3.1.21) на власні значення методом колокацій. Граничні умови мають вигляд

$$\tilde{y}=-1,\ \tilde{\upsilon}=\upsilon'=0,$$

$$\tilde{y}=1,\ \tilde{\upsilon}=\upsilon'=0.$$

Результати розрахунків для різних наборів значень параметрів M і Λ представлені в табл. 3.1.1.

Λ	$\mathbf{Re}_{cr}\cdot\mathbf{10}^4$			
	M = 0,5	M = 2	M = 4	M = 6,03
0	0,5772	0,5772	0,5772	0,5772
1	0,5853	3,5496	5,7502	6,012
10	0,37226	5,6435	5,8491	6,0577
100	5,6797	6,1285	6,7779	7,4988
1000	6,8368	10,0709	13,7756	17,2448

Таблиця.3.1.1. Залежність критичного числа Рейнольдса від параметрів M і Λ.

З таблиці видно збільшення критичних значень числа Рейнодьдса Re_{cr} з ростом параметрів *M* та Λ. Це відбувається тому, що зростає ступінь заповнювання профілю швидкості. А це, в свою чергу призводить до стабілізації течії згідно з другою теоремою Релея про стійкість потоку.

У випадку $M = \Lambda = 0$ критичний параметр нестійкості $\mathrm{Re}_{cr} = 5772$, що збігається з даними [111].

3.2. Нелінійна нестійкість у пласкому мікроканалі

Як було сказано вище, одним із способів моделювання турбулентності в пористих середовищах є ренормалізаційно груповий метод. У разі пористого середовища даний метод дозволив виявити фізичну сутність впливу складової Форхаймера на закономірності турбулентності потоку без залучення емпіричної інформації.

Розглядаються нелінійні ефекти нестійкості, які можуть виникнути після лінійного режиму [122]. Нелінійні ефекти не можуть бути описані лінійними рівняннями Орра – Зоммерфельда. Для аналізу зазначеної стадії нестійкості в пористому середовищі ми можемо скористатися залежністю для турбулентної в'язкості. Докладний опис теорії і вивід рівнянь наведено в п.2.3.

Як показано в (3.1.15) – (3.1.17), рівняння руху потоку в пористому середовищі включає член, що відповідає лінійному гідродинамічному опору і описується законом Дарсі та членами, що враховують гідродинамічний опор Форхаеймера і поправку Брінкмана.

Систему рівнянь (3.1.15. -3.1.18) перепишемо у вигляді

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nu_0 \frac{\varphi}{K} - J\nu_0\nabla^2\right)u_n = f_n - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n u_m}{\partial x_m} - \varphi^2 \frac{c_F}{\sqrt{K}}|\mathbf{V}|u_n \qquad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_m} = 0.$$

Застосовуючи алгоритм ренормалізаційно – групового методу (п.2.3), отримаємо вираз ефективної в’язкості

$$\nu = \left(\frac{3A_d D_0}{J^3 \kappa_c^{\varepsilon *}} \left(\frac{1}{\varepsilon *} - \frac{2\varphi}{JK\kappa_c^2 (2+\varepsilon^*)} \frac{d^2 - d + 3}{d\,(d-1)} \right) \right)^{1/3}. \qquad (3.2.2)$$

Як видно з цього виразу, при певних значеннях параметрів потоку та властивостей пористого середовища турбулентна в'язкість може вироджуватися. З (3.2.2) випливає, що ця в'язкість дорівнює нулю, тобто всі нелінійні збурення затухають за умови

$$K < K_{cr} = \frac{2\varphi\varepsilon *}{J\kappa_c^2 (2+\varepsilon^*)} \frac{d^2 - d + 3}{d(d-1)}. \qquad (3.2.3)$$

Виключивши хвильове число з (3.2.3) та використавши гаусовский фільтр

$$L = \frac{2\pi}{\kappa_c},$$

отримаємо критерій нестійкості у вигляді числа Дарсі

$$\mathrm{Da} < \mathrm{Da}_{cr} = \frac{\varphi\varepsilon *}{2\pi^2 J(2+\varepsilon^*)} \frac{d^2 - d + 3}{d(d-1)},$$

$$\mathrm{Da} = \frac{K}{d_{st}^2},$$

де розмір d_{st} - середній розмір частинки або діаметр фільтра, який утворює пористу середу. Цей розмір можна використовувати як фільтр Гаусса.

Для проникності використовуємо відношення Козені

$$K = \frac{d_{st}^2 \varphi^3}{180(1-\varphi^2)}$$

та вираз для співвідношення в'язкостей

$$J = \frac{1}{\varphi},$$

отримуємо наступне рівняння для критичного значення пористості:

$$\varphi_{cr} = \frac{360 + (\pi^2 + 120)d(d-1) + \pi\sqrt{d(d-1)(720 + (\pi^2 + 240)d(d-1))}}{120(d^2 - d + 3)}. \qquad (3.2.4)$$

Для тривимірного потоку рівняння (3.2.4) має вигляд

$$\varphi_{cr}^{3D} = 0{,}72, \qquad (3.2.4)$$

для двовимірного потоку маємо

$$\varphi_{cr}^{2D} = 0{,}775. \qquad (3.2.5)$$

Порівняння (3.2.4) і (3.2.5) показує, що тривимірний потік менш стійкий у порівнянні з двовимірним. Цей висновок прямо протилежний теоремі про стійкість Сквайра для лінійної стадії розвитку нестабільності в пористих середовищах.

3.3. Лінійна нестійкість в криволінійному мікроканалі

Розглядається нестійкість ламінарної течії з проковзуванням в криволінійному пористому мікроканалі, сформованому двома нерухомими концентричними поверхнями (течія Діна) (рис.3.3.1) [123]. Рух потоку забезпечується азимутальним градієнтом тиску.

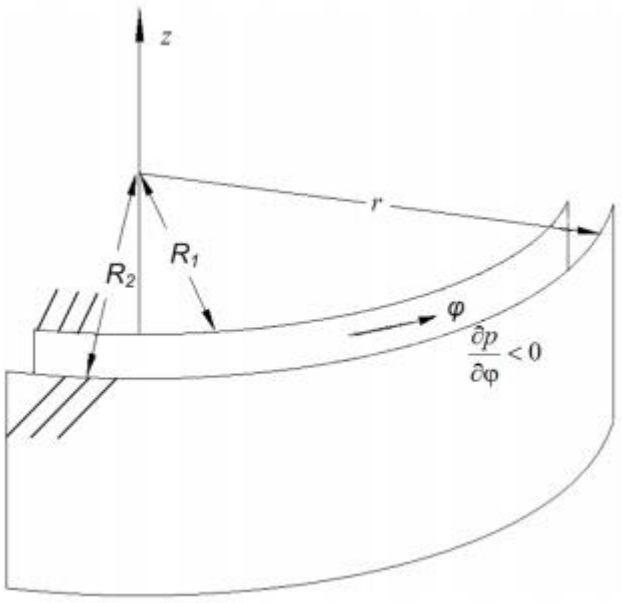


Рис. 3.3.1. Досліджувана область.

Характерною гідродинамічної особливістю течії у всіх криволінійних каналах є наявність обертального руху рідини у вигляді парного вихору. Наявність парного вихору обумовлено впливом відцентрової масової сили. В даному випадку вектор масової сили і її градієнт взаємно перпендикулярні, отже парний вихор біля увігнутої стінки відноситься до вторинних течій першого роду [124].

Гідродинаміка незбуреного потоку описується наступними рівняннями, які виражаються в циліндричних координатах

$$\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \varphi} + \tilde{w}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \nu\left(\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{w}}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{z}^2}\right) - \frac{\nu}{K}\tilde{w}, \tag{3.3.1}$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{u}^2}{\tilde{r}} + \tilde{w}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} + \nu\left(\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \varphi^2} - \frac{2}{\tilde{r}^2}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \tilde{z}^2}\right) - \frac{\nu}{K}\tilde{v}, \tag{3.3.2}$$

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} - \frac{\tilde{v}\tilde{u}}{\tilde{r}} + \tilde{w}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi} +$$
$$\nu\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \varphi^2} + \frac{2}{\tilde{r}^2}\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{z}^2}\right) - \frac{\nu}{K}\tilde{u}, \quad (3.3.3)$$

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tilde{r}} + \frac{\tilde{v}}{\tilde{r}} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad (3.3.4)$$

де «хвиля» вказує на те, що параметр розмірний. Рівняння (3.3.1) - (3.3.3) містять член, що враховує лінійний опір Дарсі пористого середовища. Для дослідження нестійкості необхідно отримати профіль швидкості незбуреної течії. Для течії Діна ці профілі отримані з азимутальної проекції рівняння імпульсу (3.3.3). Оскільки потік не залежить від азимутальної координати φ, всі інерційні члени дорівнюють нулю. Профіль швидкості також не залежить від поздовжньої координати $\tilde{z}$, тому що потік повністю розвинений. Тоді рівняння для незбуреного потоку має вигляд

$$-\frac{1}{\rho \tilde{r}}\left(-\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \varphi}\right) = \nu\left(\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{r}} - \frac{\tilde{u}}{\tilde{r}^2} - \frac{\tilde{u}}{K}\right). \quad (3.3.5)$$

Рівняння (3.3.5) в безрозмірній формі набуває вигляду:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\mathrm{Da}}\right)u = -\frac{1}{r},$$

де $u = \dfrac{\rho \nu \tilde{u}}{R_2\left(-\dfrac{\partial p}{\partial \varphi}\right)}, r = \dfrac{\tilde{r}}{R_2}$ - безрозмірні параметри; $\mathrm{Da} = \dfrac{K}{R_2^{\,2}}$ - число Дарсі.

Рівняння для потоку в криволінійному мікроканалі вирішується при наступних граничних умовах

$$u = \vartheta L\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right)\Bigg|_{wall},$$

де ϑ - коефіцієнт в`язкостного проковзування.

$$u = \sigma\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{\eta}\right) \text{ при } r = \eta, \tag{3.3.6}$$

$$u = -\sigma\left(\frac{\partial u}{\partial r} - u\right) \text{ при } r = 1, \tag{3.3.7}$$

де $\eta = \frac{R_1}{R_2}, \sigma = \frac{\vartheta L}{R_2}$.

Рівняння (3.3.5) з граничними умовами (3.3.6), (3.3.7) вирішується методом зміни параметрів. В результаті профіль швидкості для незбуреного потоку має вигляд

$$u = \frac{\mathrm{Da}}{r} + C_1 L_1\left(\frac{r}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right) + C_2 K_1\left(\frac{r}{\sqrt{\mathrm{Da}}}\right),$$

де - C_1, C_2 – константи інтегрування; I_1, K_1 – модифіковані функції Бесселя .

Відцентрова нестійкість досліджена на основі методу малих (лінійних) збурень. На основну течію накладаємо збурення, сумарні величини виглядають таким чином

$$\tilde{u}(\tilde{t},\tilde{r},\tilde{z}) = \tilde{u}_0(\tilde{r}) + \tilde{u}_A(\tilde{r})\cos(\tilde{\gamma}\tilde{z})\exp(\tilde{\beta}\,\tilde{t}), \tag{3.3.8}$$

$$\tilde{v}(\tilde{t},\tilde{r},\tilde{z}) = \tilde{v}_A(\tilde{r})\cos(\tilde{\gamma}\tilde{z})\exp(\tilde{\beta}\,\tilde{t}), \tag{3.3.9}$$

$$\tilde{w}(\tilde{t},\tilde{r},\tilde{z}) = \tilde{w}_A(\tilde{r})\sin(\tilde{\gamma}\tilde{z})\exp(\tilde{\beta}\,\tilde{t}), \tag{3.3.10}$$

$$\tilde{p}(\tilde{t},\tilde{r},\tilde{z}) = \tilde{p}_0(\tilde{r}) + \tilde{p}_A(\tilde{r})\cos(\tilde{\gamma}\tilde{z})\exp(\tilde{\beta}\,\tilde{t}). \tag{3.3.11}$$

Підставляючи рівняння (3.3.8) - (3.3.11) в рівняння (3.3.1) - (3.3.4), лініарізуя і усуваючи амплітуди $\tilde{w}_A$ і $\tilde{p}_A$ при $\tilde{\beta} = 0$, отримаємо наступні рівняння для азимутальних і радіальних амплітуд

$$\left(DD^*-\gamma^2-\frac{(1-\eta)^2}{\mathrm{Da}}\right)u_A = D^*U\mathrm{v}_A, \qquad (3.3.12)$$

$$\left[\left(DD^*-\gamma^2\right)^2-\frac{(1-\eta)^2}{\mathrm{Da}}\left(DD^*-\gamma^2\right)\right]v_A = 2\gamma^2\frac{\mathrm{De}^2}{\xi}Uu_A, \qquad (3.3.13)$$

де $D=\frac{d}{dr}, D^*=D+\frac{1-\eta}{\xi}$, $\xi=\frac{\tilde{r}}{R_2}=\eta+(1-\eta)\left(r+\frac{1}{2}\right)$, $x=\frac{r-(R_1+R_2)/2}{R_2-R_1}$

$$u_A=\frac{\tilde{u}_A}{\tilde{u}_m}, v_A=\frac{\tilde{v}_A(R_2-R_1)}{\nu}, \; U=\frac{u_0}{u_m}, \tilde{u}_m=\frac{u_m R_2\left(-\frac{\partial p}{\partial\varphi}\right)}{\rho\nu}, \quad \gamma=\tilde{\gamma}(R_2-R_1),$$

де De - число Діна; u_0, u_m - безрозмірні швидкість основного потоку і середня швидкість; γ - безрозмірне хвильове число.

Критерій гідродинамічної нестійкості, який призводить до розвитку вторинних вихорів, виходить шляхом вирішення задачі на власні значення рівнянь (3.3.12), (3.3.13) при наступних граничних умовах

$$u_A=\sigma\left(Du_A-\frac{u_A}{\eta}\right) \text{ при } x=-\frac{1}{2}; \qquad (3.3.14)$$

$$u_A=\sigma(Du_A-u_A) \text{ при } x=\frac{1}{2}. \qquad (3.3.15)$$

В результаті критичне число Діна задається наступним рівнянням

$$\mathrm{De}_{cr}=\min_{\gamma}\{\mathrm{De}(\gamma,\eta,\sigma,Da)\}.$$

Рівняння (3.3.12) - (3.3.13) з граничними умовами (3.3.14) - (3.3.15) вирішувалися методом колокацій з пробними функціями

$$u_A=\sum_{j=1}^{n}a_j\left(x^2-\frac{1}{4}\right)x^{j-1}; \qquad \mathrm{v}_A=\sum_{j=1}^{n}b_j\left(x^2-\frac{1}{4}\right)^2x^{j-1}$$

$$u_A = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) T_{2j-1}(x); \qquad \mathrm{v}_A = \sum_{j=1}^{n} b_j \left(x^2 - \frac{1}{4} \right)^2 T_{2j-1}(x),$$

де $T_{j(y)}$ - поліноми Чебишева першого роду. Результати розрахунків критичних чисел Діна представлені в табл. 3.3.1.

На рисунку 3.3.2 показана залежність критичного числа Діна від ширини каналу при різних значеннях проникності середовища.

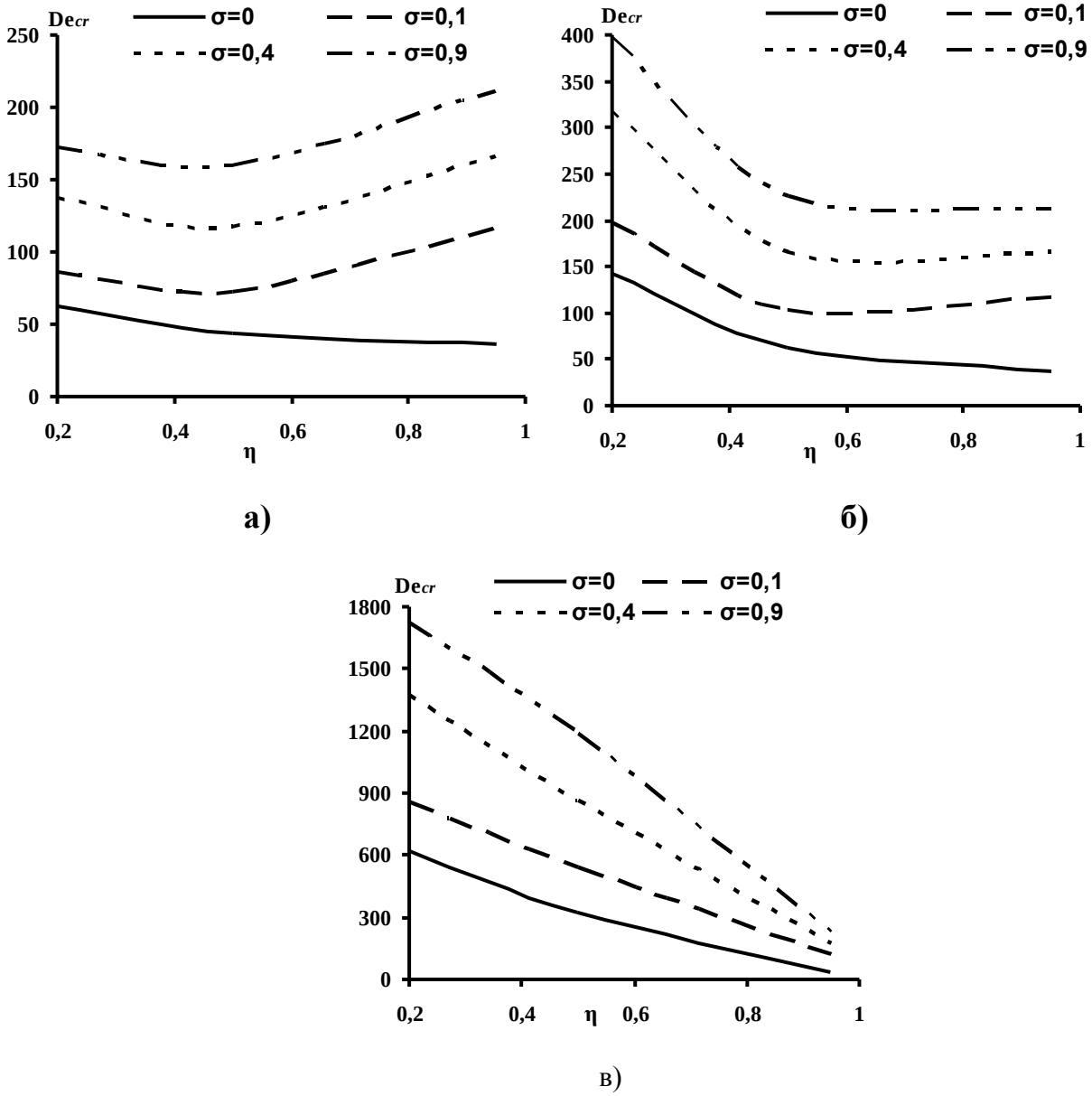
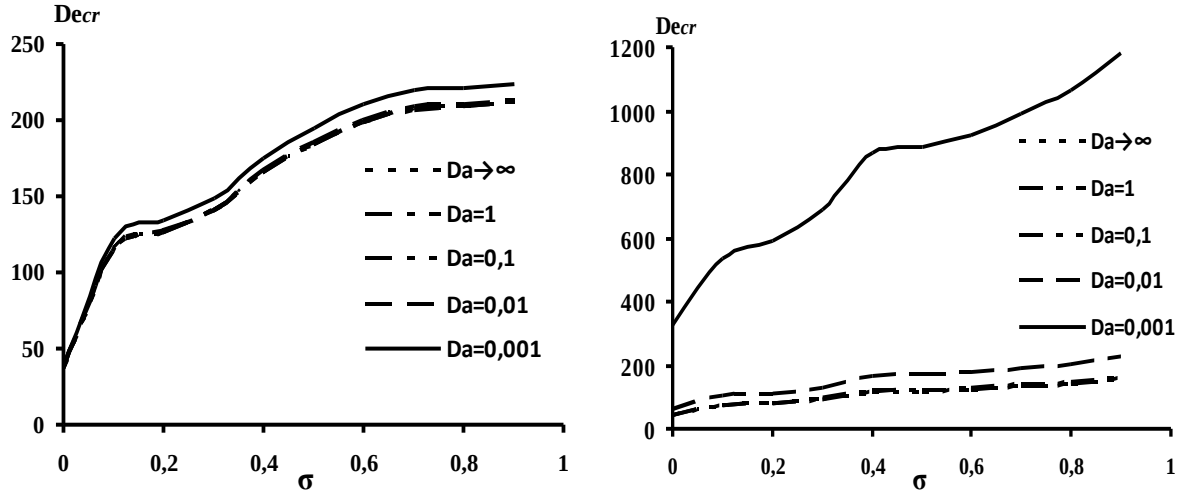
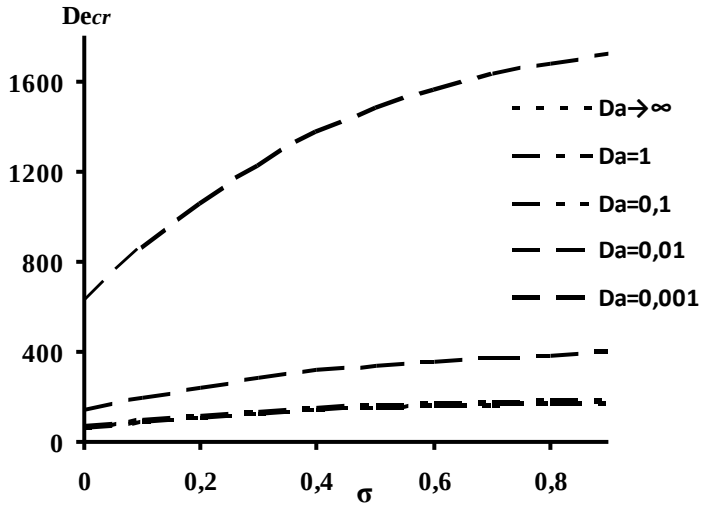


Рис.3.3.2. Залежність критичного числа Діна від параметра η при: а) Da → ∞; б) Da = 0,01; в) Da = 0,001

З ростом σ значення числа De_{cr} збільшується, що пов'язано зі збільшенням ступеня наповненості профілю незбуреної швидкості. Це тенденція спостерігається при всіх значеннях параметра Da. Також з рисунку 3.3.1а видно, що при течії чистої рідини ($Da \to \infty$) залежність критичного числа Діна має мінімум приблизно при η = 0,5. Для граничних умов без проковзування (σ = 0) цей мінімум не спостерігається. Наявність мінімумів обумовлено тим, що зі зменшенням розміру каналу при наявності умов проковзування розвиток гідродинамічної нестійкості стає більш складним. Зменшення проникності призводить до стабілізації потоку лише при малих η. Зі зменшенням ширини криволінійного каналу вплив проковзування не спостерігається і мінімумів залежності чисел De_{cr} немає.



а) б)



в)

Рис.3.3.3. Залежність критичного числа Діна від параметра σ при: а) η = 0,95; б) η = 0,5; в) η = 0,2

На рисунку 3.3.3 показана залежність критичного числа Діна від σ і проникності середовища при різних значеннях η. Як обговорювалося вище, збільшення ширини каналу (зменшення η) і зменшення проникності (зменшення Da) призводить до збільшення критичного числа Діна, що вказує на стабілізацію потоку при гідродинамічної нестійкості. Вплив проникності посилюється зі збільшенням ширини каналу. При η = 0,95 проникність практично не впливає на відцентрову нестійкість (рис.3.3.3а). Цей результат випливає з рівнянь (3.3.12) - (3.3.13), тому що члени, що містять параметр Da випадають з рівнянь при η = 1. Критичні хвильові числа також зростають зі збільшенням ширини зазору каналу і пористості середовища, із зменшенням значень параметрів η і Da трансверсальний масштаб поздовжніх вихорів зменшується.

3.4. Висновки до розділу 3

Розглянуто аналіз гідродинамічної нестійкості розрідженого потоку із проковзуванням в пласкому пористому каналі. Дослідження проведено на основі виведеного рівняння руху для двовимірних збурень. Рівняння враховує лінійну складову гідродинамічного опору пористого середовища. На основі рішення задачі на власні значення методом колокацій отримано залежність. Збільшення числа Кнудсена і параметра, що враховує пористість (*M*), призводить до зменшення критичного хвильового числа. Це вказує на те, що критична довжина хвилі обурення збільшується. Тобто довгохвильові обурення є більш небезпечними для стійкості потоку.

Розглянуто аналіз гідродинамічної нестійкості течії без проковзування на основі тривимірних збурень в пласкому пористому мікроканалі. Для визначення критеріїв гідродинамічної нестійкості використовується метод лінійних збурень.

Задача на власні значення вирішувалася методом колокацій. Розрахунки показали, що зі збільшенням параметрів *M* і Λ збільшується величина Re_{cr}. Це пов'язано з тим, що в міру збільшення параметрів *M* та Λ профіль швидкості стає більш заповнений і це, згідно з другою теоремою Релея про стійкість руху потоку, призводить до стабілізації течії і до збільшення значення критичного числа Рейнольдса.

За допомогою підходу RNG отримано вираз для кінематичної в'язкості. Отриманий вираз було використано для визначення критерію нелінійної нестійкості. Результати аналізу нестабільності дозволяють оптимізувати вибір різних (геометричних) характеристик пористого середовища для реалізації потоків у різних технологічних процесах. З порівняння розрахунків випливає, що тривимірний потік менш стійкий у порівнянні з двовимірним. Цей висновок прямо протилежний теоремі про стійкість Сквайра для лінійної стадії розвитку нестабільності в пористих середовищах.

Досліджено нестійкість потоку із проковзуванням в криволінійному пористому мікроканалі між двома нерухомими концентричними циліндрами. Отримано профіль незбуреної швидкості. Проблема лінійної нестійкості вирішена чисельно, використовуючи метод колокацій.

Розрахунки показали, що збільшення коефіцієнта проковзування, пористості середовища і ширини каналу призводить до збільшення заповнюваності профілю швидкості незбуреного потоку (профіль стає більш пласким). Це, в свою чергу, призводить до збільшення критичних значень числа Діна і критичної довжини хвилі збурення, які визначають критерії нестійкості для потоку. Також показано, що для $\sigma > 0$ залежності критичного числа Діна від параметра η мають мінімум, який спостерігається при $\eta = 0{,}5$. Зі зменшенням ширини каналу і проникності цей ефект нівелюється.

РОЗДІЛ 4. ТЕПЛООБМІН ТА ГІДРОДІНАМІКА У ПОРИСТИХ МІКРОКАНАЛАХ РІЗНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

4.1. Змішана конвекція у пласкому мікроканалі

В даному розділі розглянуто результати дослідження фізичних процесів при різного роду конвекції [125] на основі математичної моделі, викладеної в п. 2.1. Розглянемо проблему змішаної конвекції при розвиненому ламінарному плині в вертикальному пласкому пористому мікроканалі, ширина якого $2H$, зі стінками, що обігріваються (рис.4.1.1). Вимушений рух конвективного потоку направлено догори. Для врахування вільної конвекції використовується підхід Буссінеска, згідно з яким зміна щільності враховується при обчисленні підйомної сили в рівнянні (4.1.1).

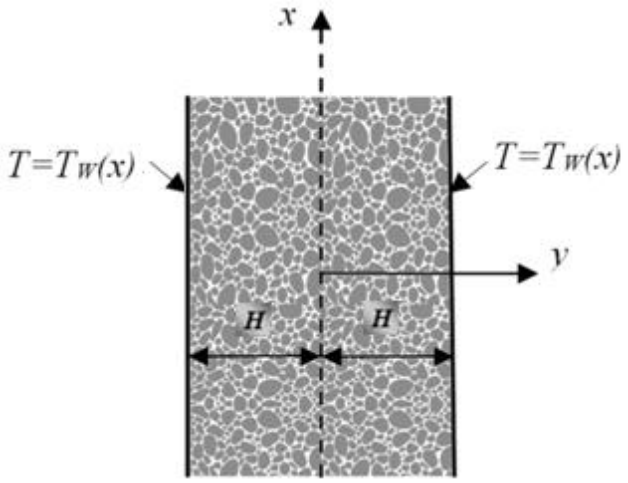


Рис. 4.1.1. Схематичне зображення плаского вертикального мікроканалу

Таким чином, математичну модель можна записати у такому вигляді:

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\mu}{K} u + \rho g \beta (T - T_w); \qquad (4.1.1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \qquad (4.1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Задача описується рівнянням Брінкмана, рівнянням Фур'є-Кірхгофа та рівнянням нерозривності. У рівнянні Брінкмана маємо два доданки в'язкості. Перший член є аналогом умови Лапласіана, який з'являється в рівнянні Нав'є-Стокса, а другий - умова Дарсі [1].

Математична модель задач для теплообміну в такому каналі може бути доповнена граничною умовою, що описує постійний градієнт температури G на стінці уздовж вертикальної осі x, тобто $T_w = Gx$ [126]. Ця гранична умова відповідає постійному тепловому потоку на стінці. Оскільки температура стінки змінюється лінійно, а форма профілю температури в поперечному перерізі каналу (вздовж осі y) не залежить від координати x для повністю розвиненого ламінарного потоку, то цей профіль температури також змінюється лінійно щодо координати x, так що різниця температур має вигляд

$$T(x,y) - T_w = T(x,y) - Gx = \phi(y), \tag{4.1.3}$$

та не залежить від координати x.

Граничні умови проковзування задаються у вигляді

$$u = \gamma L \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \phi = \frac{\gamma L}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad \text{при} \quad y = -H, \tag{4.1.4}$$

$$u = -\gamma L \frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \phi = -\frac{\gamma L}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad \text{при} \quad y = H. \tag{4.1.5}$$

де ϕ - різниця температур, γ – коефіцієнт в'язкого проковзування, L – довжина вільного пробігу молекул.

Вводимо наступні безрозмірні параметри

$$Y = \frac{y}{H}, \qquad U = \frac{u}{E}, \qquad \theta = \frac{a\phi}{GH^2E}, \ \mathrm{Da} = \frac{K}{H^2}, \ M = (\mathrm{Da})^{-1/2}, \tag{4.1.6}$$

$$E = \left(-\frac{dp}{dx}\right)\frac{H^2}{\mu}, \qquad \mathrm{Ra} = \frac{g\beta\rho H^4 G}{a\mu}, \quad \mathrm{Pr} = \frac{\mu}{a\rho}. \tag{4.1.7}$$

Після процедури обезрозмірювання, використовуючи (4.1.6), (4.1.7), рівняння (4.1.1), (4.1.2) можна переписати у вигляді

$$\frac{d^2U}{dY^2} + \mathrm{Ra}\,\theta - MU = -1, \qquad (4.1.8)$$

$$\frac{d^2\theta}{dY^2} - U = 0. \quad (4.1.9)$$

Перетворюючи граничні умови (4.1.4), (4.1.5) до безрозмірної форми, отримаємо

$$U = \mathrm{Kn}\frac{dU}{dY}, \qquad \theta = \frac{\mathrm{Kn}}{\mathrm{Pr}}\frac{d\Theta}{dY} \qquad \text{при} \qquad Y = -1, \qquad (4.1.1)$$

$$U = -\mathrm{Kn}\frac{dU}{dY}, \qquad \theta = -\frac{\mathrm{Kn}}{\mathrm{Pr}}\frac{d\Theta}{dY} \qquad \text{при} \qquad Y = 1, \qquad (4.1.11)$$

де $\mathrm{Kn} = \gamma L/H$ – число Кнудсена.

Рішення задачі для вертикального плаского мікроканала були отримані аналітично з використанням методу виключення. Двічі диференціюючи по Y рівняння (4.1.9), отримаємо

$$\frac{d^4\Theta}{dY^4} - \frac{d^2U}{dY^2} = 0. \qquad (4.1.12)$$

Використовуючи рівняння (4.1.12), можна виключити швидкість з рівняння (4.1.8). Таким чином

$$\frac{d^4\Theta}{dY^4} + \mathrm{Ra}\,\Theta - M\frac{d^2\Theta}{dY^2} = -1.$$

Рішення для функції Θ (*Y*), отримане таким чином, може бути використано для отримання розподілу швидкостей *U(Y)* з рівняння (4.1.9). Нарешті, рішення з граничними умовами (4.1.10) та (4.1.11) для обох функцій має вигляд

$$U = \frac{1}{2}\left(M - \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}\right)C_2\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{M - \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right) - \sinh\left(\frac{\sqrt{M - \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right)\right) +$$
$$\frac{1}{2}\left(M - \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}\right)C_1\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{M - \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right) + \sinh\left(\frac{\sqrt{M - \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right)\right) +$$
$$\frac{1}{2}\left(M + \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}\right)C_4\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{M + \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right) - \sinh\left(\frac{\sqrt{M + \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right)\right) + \qquad (4.1.13)$$
$$\frac{1}{2}\left(M + \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}\right)C_3\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{M + \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right) + \sinh\left(\frac{\sqrt{M + \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\theta = -\frac{1}{Ra} + C_1\cosh\left(\frac{\sqrt{M - \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right) + C_2\cosh\left(\frac{\sqrt{M - \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right) +$$
$$C_3\cosh\left(\frac{\sqrt{M + \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right) + C_4\cosh\left(\frac{\sqrt{M + \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right) +$$
$$C_1\sinh\left(\frac{\sqrt{M - \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}a}}\,Y}{\sqrt{2}}\right) - C_2\sinh\left(\frac{\sqrt{M - \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right) +$$
$$C_3\sinh\left(\frac{\sqrt{M + \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}a}}\,Y}{\sqrt{2}}\right) + C_4\sinh\left(\frac{\sqrt{M + \sqrt{M^2 - 4\mathrm{Ra}}}\,Y}{\sqrt{2}}\right) \qquad (4.1.14)$$

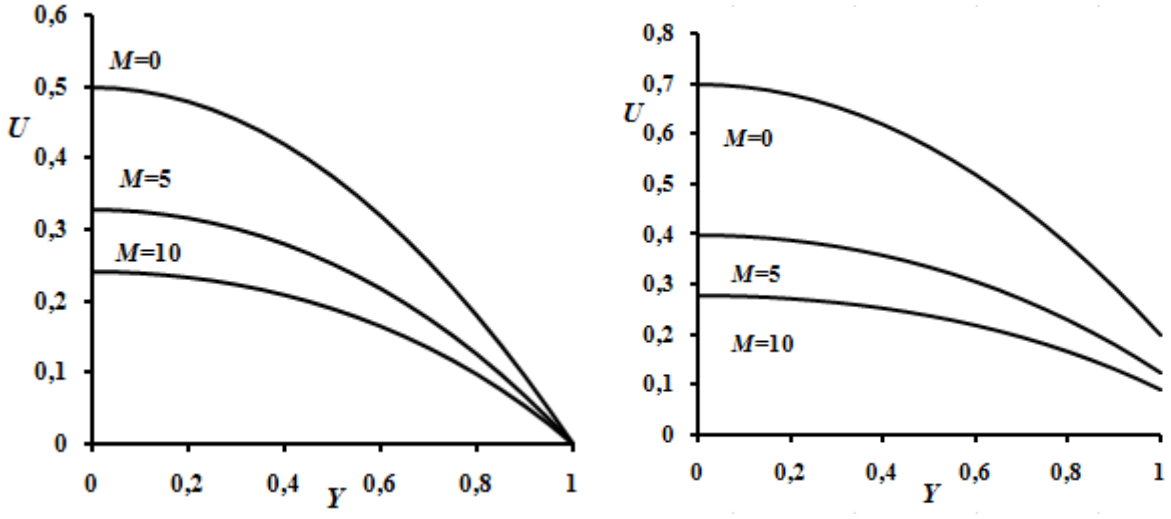
де C_1, C_2, C_3, C_4 є константами інтегрування. У граничному випадку (M = 0) рівняння (4.1.13) та (4.1.14) зводяться до відповідних рішень, які опубліковані в роботі [4].

Враховуючи той факт, що в даній роботі порівнюється вплив безрозмірних критеріїв Ra, Kn та M на фізичні процеси при течії в мікроканалах різної геометрії,

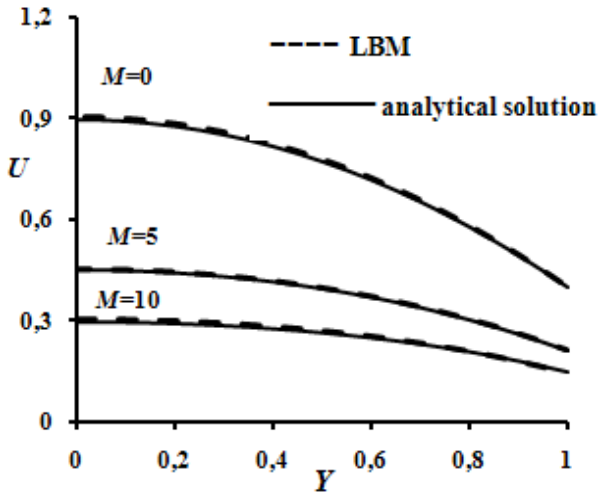
слід використовувати еквівалентний діаметр D_e, який для плаского каналу визначається як

$$D_e = \frac{4S}{\Pi} = 4H .$$

На рисунку (4.1.2) показана динаміка зміни профілю швидкості в мікроканалі для різних чисел Kn і параметра *M*, що враховує пористість середовища при Ra = 1; Pr = 1. Рисунок 4.1.2(а) відповідає потоку без проковзування на стінці (Kn = 0). Збільшення числа Кнудсена призводить до збільшення швидкості проковзування (стрибка швидкості) на стінці і збільшення локальної швидкості в центральній частині каналу.



а) *б)*

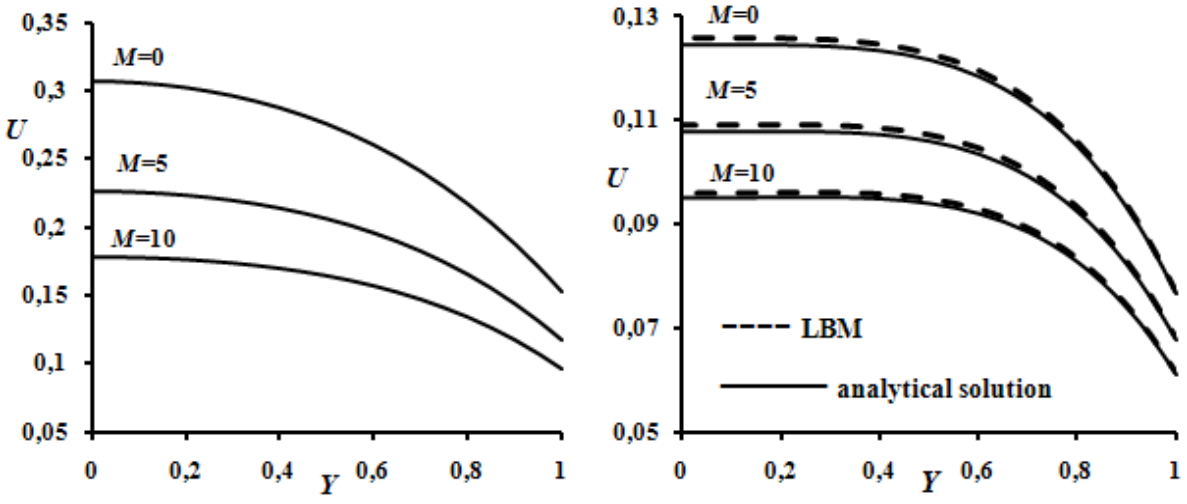


в)

Рис.4.1.2. Вплив параметра *M* на профіль швидкості при: а) Kn = 0, б) Kn = 0.05, в) Kn = 0.1

Зі збільшенням параметра пористості *M* (зменшенням проникності) швидкість потоку зменшується, а профіль швидкості стає більш заповненим. Також можна відзначити, що при цьому зменшується стрибок швидкості на стінці. Фізична причина цього явища полягає в збільшенні гідравлічного опору каналу. Крім того, на рис. 4.1.2(в) показано порівняння результатів аналітичного аналізу та чисельного розрахунку на основі методу LBM, алгоритм якого викладено в п. 2.2.2. Різниця між цими результатами становить близько 1%. Аналогічне порівняння показано на малюнках нижче та різниця між ними також становить 1%.

Однак форма профілю швидкості залежить не тільки від числа Кнудсена і параметру *M*, а й від числа Релея. Профілі швидкості зображені на малюнку 4.1.3. для різних чисел Релэя і параметра *M* при Kn = 0,1; Pr = 1.

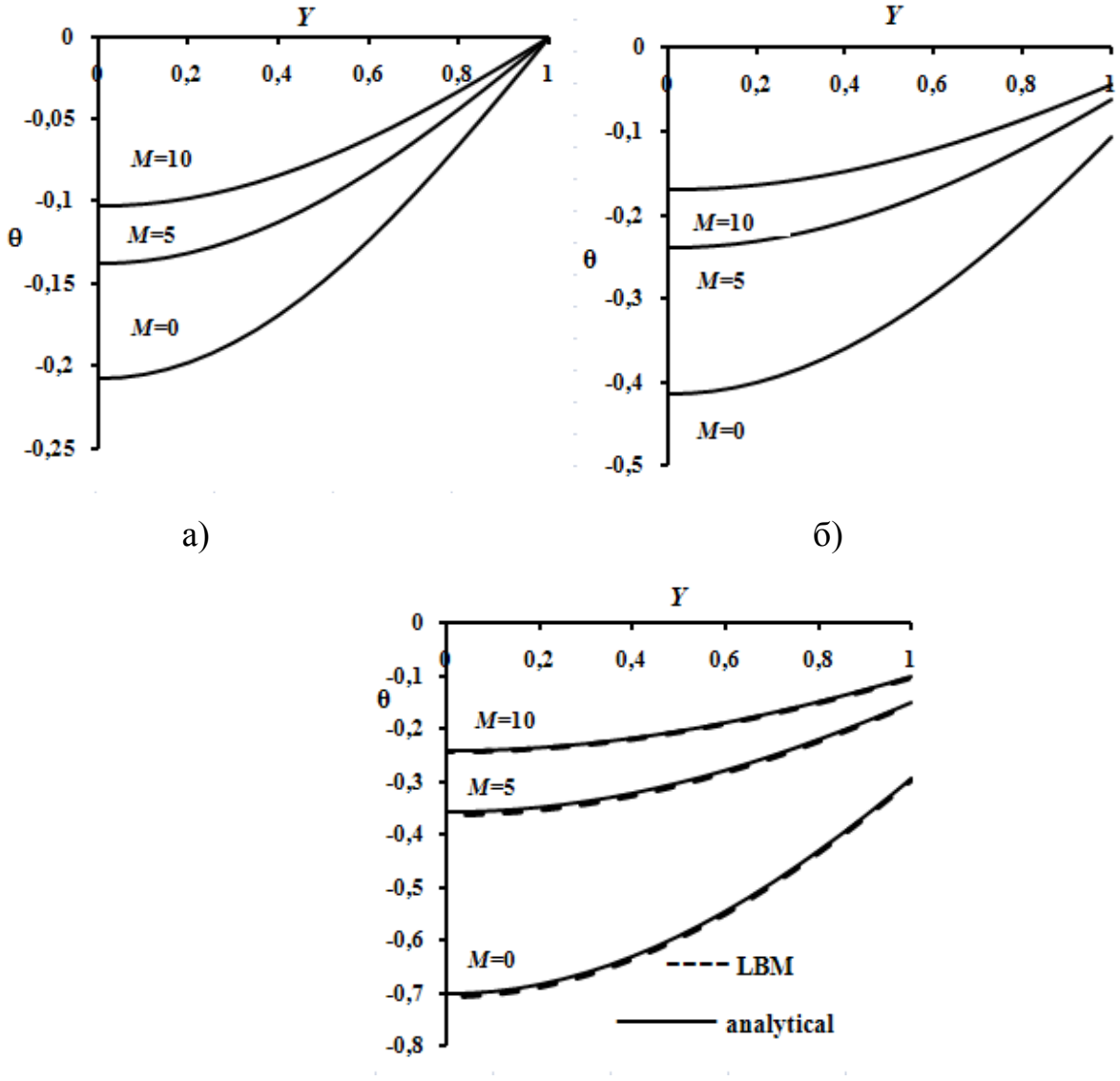


а) б)

Рисунок 4.1.3. Вплив параметра *M* на профіль швидкості при: а) Ra = 80; б) Ra = 2400

Розрахунки показали, що зі збільшенням значення числа Релэя стрибок швидкості на стінці зменшується. Отже, ефекти мікротечій більш яскраво виражені переважно при впливі вимушеної конвекції.

Далі на малюнках 4.1.4 - 4.1.6 показано загалом вплив різних факторів на форму профілю температури потоку.



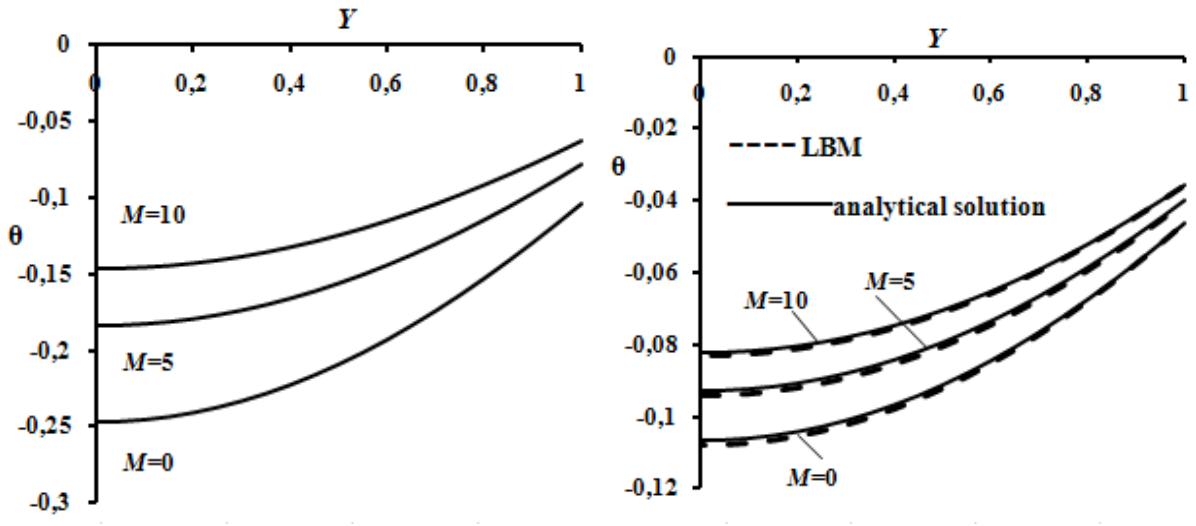
а) б)

в)

Рис. 4.1.4. Вплив параметра *M* та Kn на профіль температури: а) Kn = 0, б) Kn = 0.05, в) Kn = 0,1 при: Pr = 1, Ra=1

Малюнок 4.1.4. демонструє, що збільшення числа Кнудсена викликає скачки температури на стінці. Збільшення параметра пористості *M* призводить до вирівнювання температурних профілів. Локальні температури потоку в

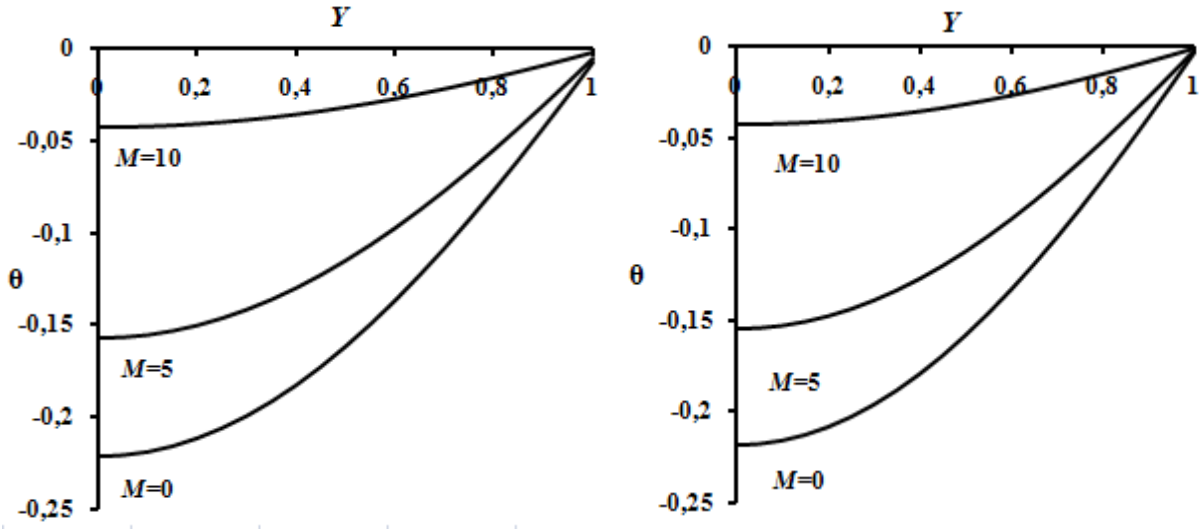
поперечному перетині каналу прагнуть до температури стінки, а скачки температури на стінці зменшуються.



а) б)

Рис. 4.1.5. Вплив параметра *M* та Ra на профіль температури: а) Ra = 800, б) Ra = 2400 при: Pr = 1, Kn = 1

Для всіх чисел Ra збільшення параметра *M* призводить до вирівнювання профілю температури. Форма профілю температури стає рівномірною. З ростом числа Ra скачки температури на стінці зменшуються, що пов’язано з особливостями вільної конвекції.



а) б)

Рис. 4.1.6. Вплив параметра *M* та Pr на профіль температури: а) Pr = 5, б) Pr = 10 при: Ra = 1, Kn = 0,1

Розрахунки показали, що величина температурного скачка на стінці також залежить від числа Прандтля. Для більш високих чисел Прандтля скачок температури на стінці слабшає, що випливає з граничних умов (4.1.10), (4.1.11). Це ослаблення температурного скачка є нелінійним. Для чисел Прандтля Pr > 5 величина температурного скачка залишається майже незмінною. Збільшення параметра *M* також збільшує температуру і робить профіль температури більш заповненим.

Далі розглянемо вплив безрозмірних параметрів на коефіцієнт тепловіддачі. Тепловий потік розраховується за формулою

$$q_w = \frac{Gc_p}{\Pi}\frac{\partial T}{\partial x}. \qquad (4.1.15)$$

Враховуючи лінійний розподіл температури (4.1.3), з рівняння (4.1.15) можна отримати

$$\frac{q_w H}{(T_m - T_w)ac_p\rho} = \frac{Gu_m H^2}{a(T_m - T_w)}, \qquad (4.1.16)$$

де
$$u_m = \frac{1}{2H}\int_{-H}^{H} u dy, \qquad (4.1.17)$$

$$T_m = \frac{\int_{-H}^{H} T u dy}{\int_{-H}^{H} u dy} \qquad (4.1.18)$$

Тоді рівняння (4.1.16) має вигляд

$$\mathrm{Nu} = \frac{4}{\theta_m}, \qquad (4.1.19)$$

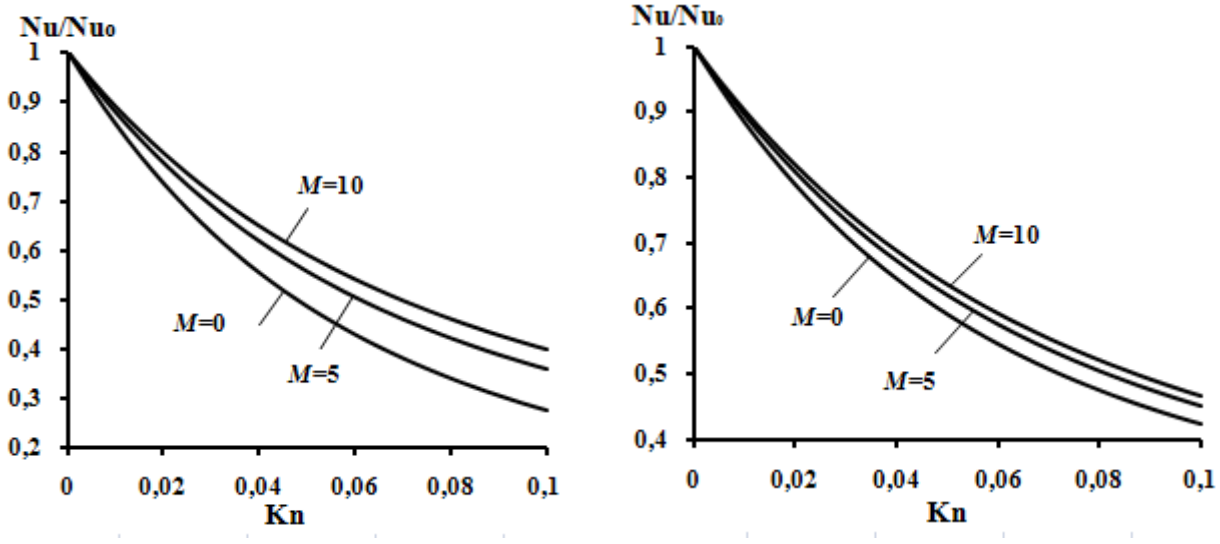
де

$$\mathrm{Nu} = \frac{q_w 4D_e}{(T_m - T_w) a c_p \rho}, \tag{4.1.20}$$

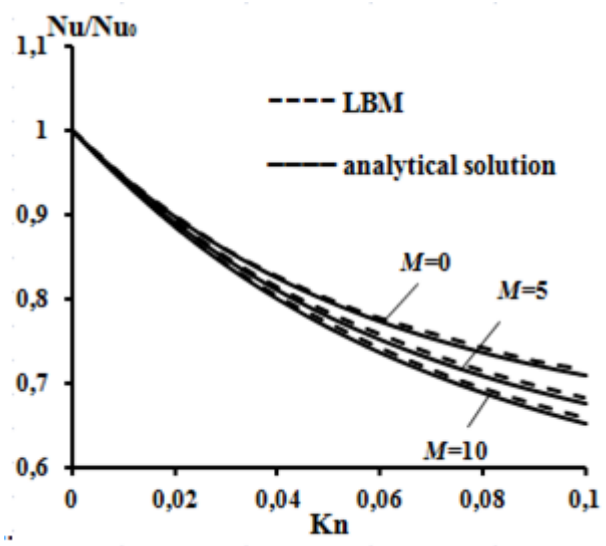
$$\theta_m = \frac{\int_{-1}^{1} \theta U dY}{\int_{-1}^{1} U dY} \tag{4.1.21}$$

- число Нуссельта та безрозмірна температура потоку.

На малюнке 4.1.6 показано вплив чисел Релея, Кнудсена та параметра *M* на нормоване число Нуссельта Nu/Nu_0, де Nu_0 – число Нуссельта при Kn = 0. Для всіх комбінацій критеріїв Ra, Kn та *M* збільшення числа Кнудсена знижує інтенсивність теплообміну. Це пов'язано зі збільшенням температури на стінці, що викликає ухудшення умов теплової взаємодії між рідиною та стінкою. Динаміка зміни відносного числа Нуссельта з ростом числа Релея показує, що існує інверсія впливу пористості на параметр $\overline{Nu}$. На рисунку 4.1.6а показано, що при малих значеннях Ra зі зменшенням пористості коефіцієнт тепловіддачі збільшується, оскільки, як було сказано вище, при збільшенні параметра *M* скачок температури на стінці зменшується.



а) б)



в)

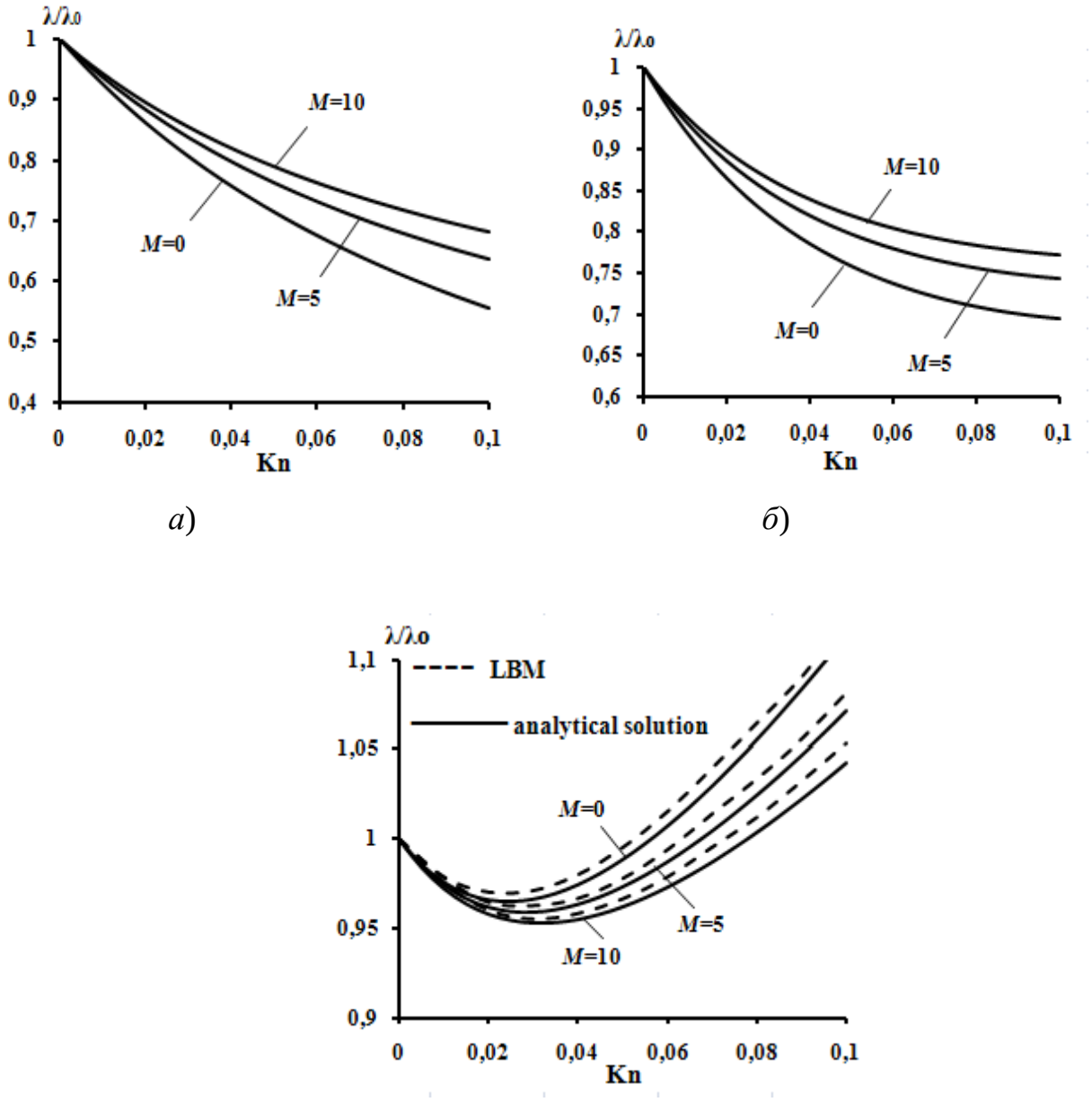
Рис. 4.1.7. Нормоване число Нуссельта Nu/Nu_0: а) Ra = 1, б) Ra = 400, в) Ra = 2400

Збільшення числа Релея спричиняє збільшення швидкості біля стінки, що супроводжується інтенсифікацією теплопередачі. Це є причиною того, що теплова взаємодія в цих умовах нечутлива щодо ефектів проковзування. Сумісний вплив цих двох факторів збільшує число Нуссельта, тому що при збільшенні значення параметра M ця швидкість зменшується (рис.4.1.3), та відбувається більш інтенсивне зменшення нормованого числа Нуссельта.

Окрім параметрів теплопередачі також досліджено гідравлічний опір, який описується рівнянням Дарсі - Вейсбаха

$$\frac{\Delta p}{l} = \lambda \frac{\rho u_m^2}{2D_e} ,$$

де λ - коефіцієнт гідравлічного опору. Цей коефіцієнт обернено пропорційний середньорасходной швидкості. Результати розрахунків для нормованого коефіцієнта λ / λ_0 представлено на рис. 4.1.8.



а) *б*)

в)

Рис. 4.1.8. Нормований коефіцієнт терття λ/λ_0: а) Ra = 1, б) Ra = 400, в) Ra = 2000

Як видно з рисунку, для випадку низьких чисел Релея в міру збільшення числа Кнудсена гідравлічний опор зменшується і зростає зі збільшенням пористості. Однак, для більш високих чисел Релєя нахил кривих на рис. 4.1.7.(б) зменшується, що означає ослаблення ефекту проковзування. При подальшому зростанні значення параметра *M* (як і в разі відносного коефіцієнта теплопередачі) відбувається інверсія ефекту пористості на гідравлічний опор. Крім того, як можна бачити з ріс. 4.1.7.(в), починаючи з певних значень числа Релея, збільшення числа Кнудсена призводить до

збільшення гідравлічного опору. Ця тенденція обумовлена тим, що збільшення числа Релея тягне за собою збільшення градієнта швидкості на стінці.

4.2. Змішана конвекція у циліндричному мікроканалі

Розглянемо особливості фізичних процесів при змішаній конвекції з проковзуванням в вертикальному круглому пористому мікроканалі радіусом r_0 [125].

Фізична постановка задачі подібна задачі, викладеної в п. 4.1.

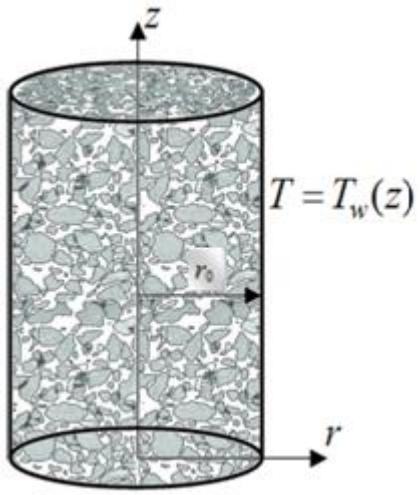


Рис. 4.2.1. Схематичне зображення круглого вертикального мікроканалу

Математична модель включає систему диференціальних рівнянь в циліндричних координатах та має вигляд

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\mu}{K}u + \rho g\beta(T - T_w), \tag{4.2.1}$$

$$u\frac{\partial T}{\partial z} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right), \tag{4.2.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

В рамках підходу, розробленого Тао [127], на стінці каналу також встановлено постійний тепловий потік, що відповідає лінійному розподілу

температури стінки в напрямку осі z, $T_w = Gz$. Так як температура потоку також змінюється лінійно, різниця температури стінки і потоку не залежить від координати z.

$$T(z,r) - T_w = T(z,r) - Gz = \phi(r) \tag{4.2.3}$$

Граничні умови задаються у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial r} = 0 \qquad \text{при} \quad r = 0, \tag{4.2.4}$$

$$u = -\gamma L \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \phi = -\frac{\gamma L}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad \text{при} \quad r = r_0. \tag{4.2.5}$$

Введемо безрозмірні величини

$$R = \frac{r}{r_0}, \qquad U = \frac{u}{E}, \qquad \Theta = \frac{a\phi}{G r_0^2 E}, \ \mathrm{Da} = \frac{K}{r_0^2}, \ M = (\mathrm{Da})^{-1/2}$$

$$E = \left(-\frac{dp}{dz} \right) \frac{r_0^2}{\mu}, \qquad \mathrm{Ra} = \frac{g\beta\rho r_0^4 G}{a\mu}, \qquad \mathrm{Pr} = \frac{\mu}{a\rho}.$$

Після обезрозмірювання рівняння (4.2.1.), (4.2.2.) мають вигляд

$$\left(\frac{d^2 U}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} \right) + \mathrm{Ra}\,\Theta - MU = -1, \tag{4.2.6}$$

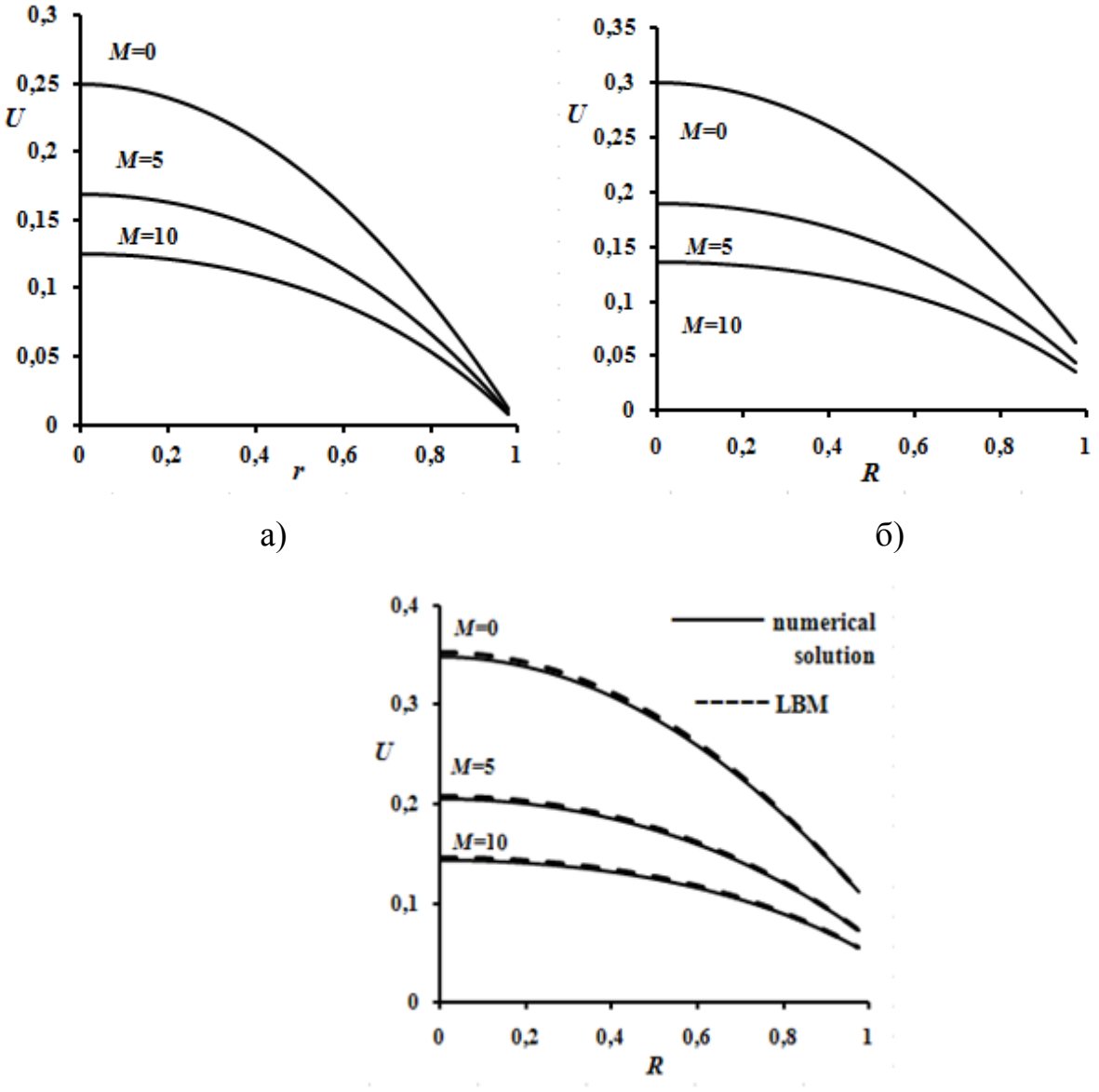
$$\left(\frac{d^2 \Theta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\Theta}{dR} \right) - U = 0. \tag{4.2.7}$$

Граничні умови (4.2.4), (4.2.5) в безрозмірній формі виглядають як

$$\frac{dU}{dR} = 0, \qquad \frac{d\theta}{dR} = 0 \qquad \text{при} \quad R = 0, \tag{4.2.8}$$

$$U = -\mathrm{Kn} \frac{dU}{dR}, \qquad \Theta = -\frac{\mathrm{Kn}}{\mathrm{Pr}} \frac{d\Theta}{dR} \qquad \text{при} \quad R = 1. \tag{4.2.9}$$

Систему рівнянь (4.2.6) - (4.2.7) з граничними умовами (4.2.8) - (4.2.9) було вирішено чисельно за допомогою програмного забезпечення "Wolfram Mathematica". Результати розрахунків показано на рисунках 4.2.2 – 4.2.6 На рис. 4.2.2(в), 4.2.3(б), 4.2.4(в), 4.2.5(в), 4.2.6(в) показано порівняння цих результатів з чисельними розрахунками на основі методу LBM. Різниця між ними результатами становить близько 1%.

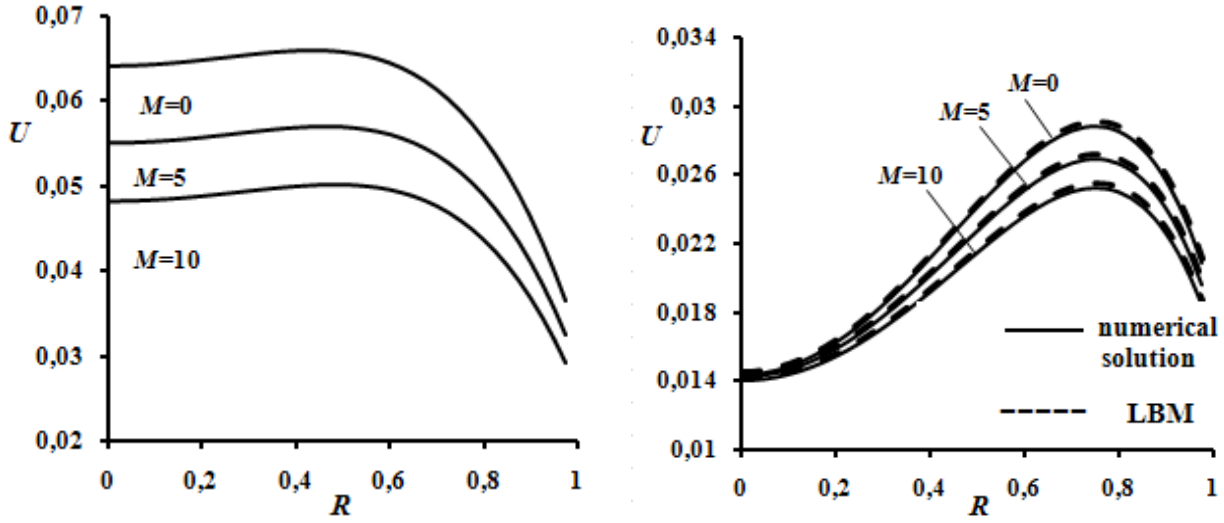


а) б)

в)

Рис.4.2.2. Вплив параметра *M* на профіль швидкості при: а) Kn = 0, б) Kn = 0.05, в) Kn = 0.1

З рисунка видно, що характер течії при впливі цих параметрів подібний характеру течії у пласкому мікроканалі (рис. 4.1.2). Зі збільшенням числа Кнудсена зростають значення стрибка швидкості на стінці та локальної швидкості потоку, включаючи максимальну швидкість на осі каналу. Зі збільшенням значення параметра M швидкість потоку зменшується і профіль швидкості стає більш заповненим, значення стрибка на стінці падає.



а) б)

Рисунок 4.2.3. Вплив параметра M на профіль швидкості при: а) Ra = 80; б) Ra = 2400

Розрахунки проводились при Kn = 0.1, Pr = 1. Порівняння рис. 4.1.2(в) та рис. 4.1.3(а) показує, що зі збільшенням значення числа Релея стрибок швидкості на стінці зменшується. Як видно з малюнка 4.1.3(б), при високих числах Релея (Ra = 2400) характер зміни профілю швидкості значно змінюється. Профіль швидкості стає М - образним і мінімум швидкості виникає на осі каналу. При високих значеннях чисел Релея (Ra = 2400) ефект вільної конвекції стає переважаючим і призводить до виникнення двох локальних максимумів швидкості на відстані (0,2 ... 0,3)r_0 від стінок каналу через висхідні вільні конвективні потоки. Зсув максимуму

швидкості до стінок каналу пов'язано зі зменшенням щільності середовища поблизу стінок.

Вплив різних значень числа Кнудсена та параметра *M* на профілі температури при Pr = 1 та Ra = 1 зображено на рис.4.2.4.

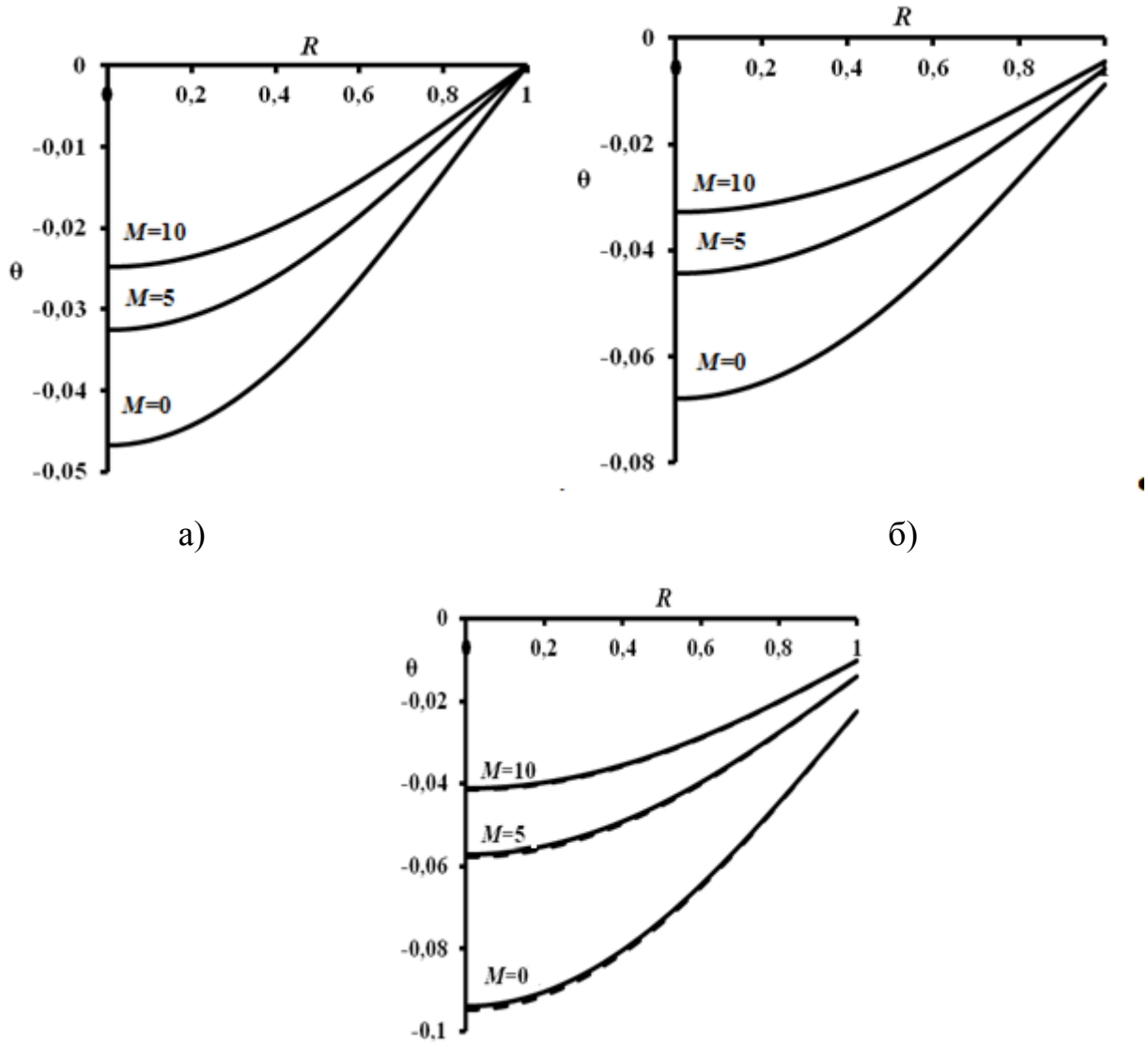


Рисунок 4.2.4. Вплив параметра *M* на профіль температури при: а) Kn = 0, б) Kn= 0,05, в) Kn = 0,1

Розрахунки з дослідження впливу безрозмірних параметрів на профіль температури в круглому мікроканалі показали, що характер зміни форми профілю подібний характеру зміні профілю в пласкому мікроканалі. Зі збільшенням

проковзування зростає стрибок температури на стінці. У свою чергу, зростання числа Ra, Pr і параметра M цей стрибок нівелює. Локальні значення температури прагнуть до температури стінки, форма профілю вирівнюється.

Для мікроканалу круглого перетину локальний тепловий потік можна записати як

$$q_w = \frac{Gc_p}{\Pi}\frac{\partial T}{\partial z}. \qquad (4.2.10)$$

Використовуючи (4.2.3), з рівняння (4.2.10) отримаємо

$$\frac{q_w r_0}{(T_m - T_w)ac_p\rho} = \frac{Gu_m r_0^{\,2}}{2a(T_m - T_w)}, \qquad (4.2.11)$$

де $$u_m = \frac{1}{2r_0^2}\int_0^{r_0} urdr, \qquad (4.2.12)$$

$$T_m = \frac{\int_0^{r_0} Turdr}{\int_0^{r_0} urdr}$$

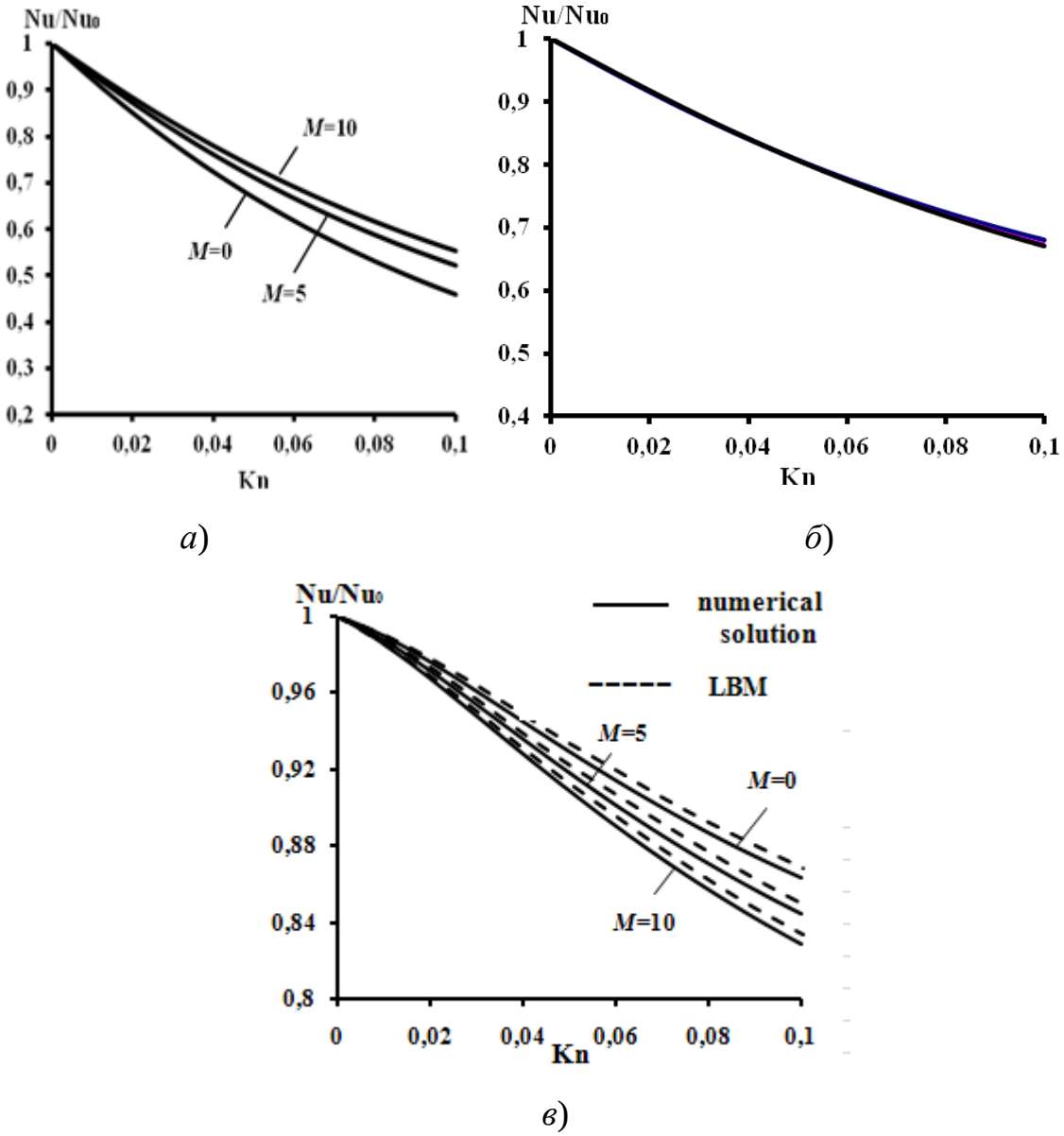
- середня швидкість та температура. Тоді рівняння (4.2.11) можна переписати у вигляді

$$\mathrm{Nu} = \frac{1}{\theta_m},$$

де $$\mathrm{Nu} = \frac{q_w 2r_0}{(T_m - T_w)ac_p\rho}, \qquad (4.2.13)$$

$$\theta_m = \frac{\int_0^1 \theta URdR}{\int_0^1 URdR}.$$

Рисунок 4.2.5 показує результати розрахунку для коефіцієнта тепловіддачі в залежності від числа Кнудсена, Релея і пористості середовища.



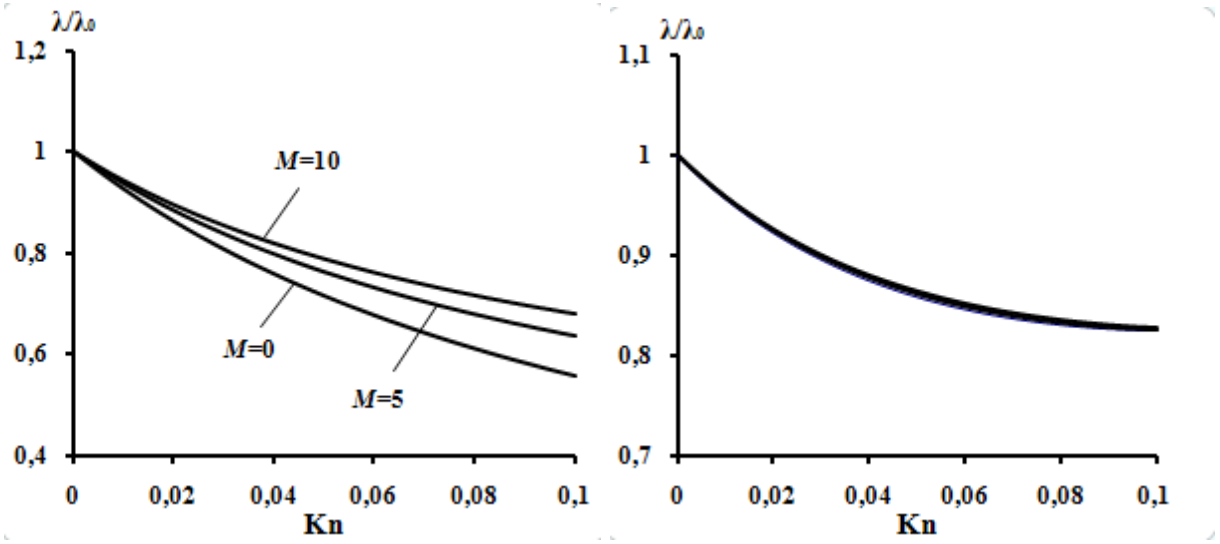
а) *б*)

в)

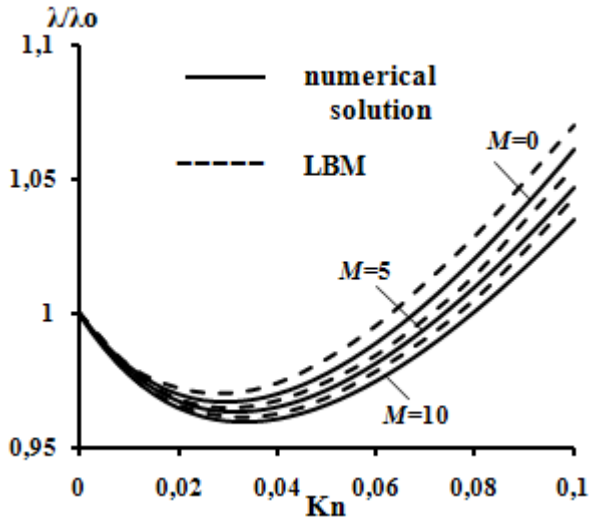
Рис. 4.2.5. Нормоване число Нуссельта Nu/Nu_0: а) Ra = 1, б) Ra = 400, в) Ra = 2400

Розрахунки показали, що характер поведінки відносного числа Нуссельта для мікроканалу круглого поперечного перетину ідентичний поведінці в пласкому мікроканалі, але процеси теплообміну протікають більш інтенсивно. При малих значеннях числа Ra з ростом параметра *M* інтенсивність тепловіддачі збільшується, тому що зменшується стрибок температури на стінці. При Ra = 400 вплив

пористості не спостерігається. При великих значеннях Ra швидкість тепловіддачі зменшується, тому що зменшується швидкість потоку поблизу стінки.



а) *б*)



в)

Рис. 4.2.6. Нормований коефіцієнт тертя λ/λ_0: а) Ra = 1, б) Ra = 400, в) Ra = 2000

Як і в разі нормованого коефіцієнта тепловіддачі, при збільшенні ефекту проковзування гідравлічний опір зменшується та при Ra > 400 відбувається інверсія впливу пористості. Також при великих значеннях числа Ra збільшення проковзування викликає спочатку зменшення, потім збільшення відносного коефіцієнта тертя при Kn ≈ 0,3.

4.3. Примусова конвекція у пласкому мікроканалі

У даному розділі представлені результати дослідження примусової конвекції в пласкому мікроканалі, ширина якого $2H$ (рис.4.3.1), заповненому пористим середовищем з урахуванням граничних умов проковзування першого та другого порядку [128]. Як обговорювалось вище (п.2.1.), застосування граничних умов проковзування другого порядку дозволяє розширити межі континуальної течії і при моделюванні збільшити діапазон числа Кнудсена від значень Kn < 0,1 до Kn < 1.

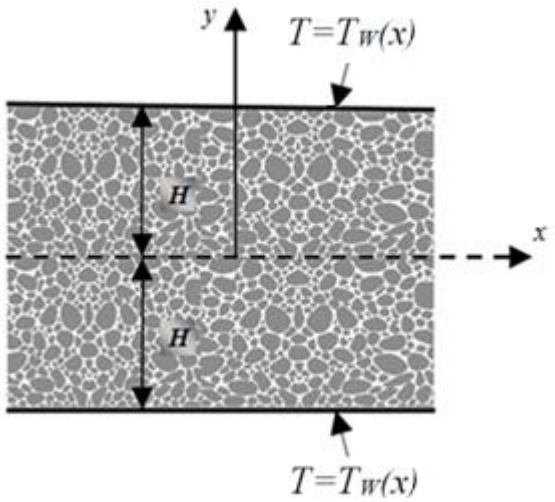


Рис. 4.3.1. Схематичне зображення плаского мікроканалу

У загальному випадку для швидкості u_w та температури T ці граничні умови можуть бути представлені як

$$u_w = A_1 \mathrm{Kn}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_w + A_2 \mathrm{Kn}^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right)_w, \tag{4.3.1}$$

$$T - T_w = A_1 \frac{\mathrm{Kn}}{\mathrm{Pr}}\left(\frac{\partial T}{\partial n}\right)_w + A_2 \left(\frac{\mathrm{Kn}}{\mathrm{Pr}}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial n^2}\right)_w, \tag{4.3.2}$$

де n - нормаль до поверхні стінки, коефіцієнт A_1 може змінюватись в діапазоні $0 < A_1 < 1$, та коефіцієнт A_2 може приймати як негативні, так і позитивні значення.

Розглядається стаціонарна задача в разі повністю розвиненої ламінарної течії. Для рішення поставленого завдання математична модель, яка описує потік рідини, теплопередачу й масо перенос, виглядає в таким чином

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\mu}{K} u, \tag{4.3.3}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \tag{4.3.4}$$

Течія рухається уздовж горизонтальної осі x за умови постійного градієнта температури G на стінці, тобто $T_w = Gx$, що відповідає постійному тепловому потоку на стінці. Профіль температури також змінюється лінійно, різниця температур для плаского каналу стає незалежним від координати x,

$$T(x,y) - T_w = T(x,y) - Gx = \phi(y).$$

Далі розглянуто рішення для різних видів граничних умов проковзування. Граничні умови першого порядку випливають з рівнянь (4.3.1) та (4.3.2), коли $A_1 = 1$ і $A_2 = 0$. Для цього випадку маємо

$$u = -\alpha H \frac{\partial u}{dy}, \qquad \phi = -\frac{\alpha H}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad \text{при} \quad y = H, \tag{4.3.5}$$

$$u = \alpha H \frac{\partial u}{dy}, \qquad \phi = \frac{\alpha H}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad \text{при} \quad y = -H, \tag{4.3.6}$$

де $\alpha = \mathrm{Kn} = \frac{L}{H}$.

Граничні умови другого порядку мають вигляд

$$u = -\alpha H \frac{\partial u}{\partial y} + \beta H^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \phi = -\frac{\alpha H}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\beta H^2}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \qquad \text{при} \qquad y = H, \qquad (4.3.7)$$

$$u = \alpha H \frac{\partial u}{\partial y} + \beta H^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \phi = \frac{\alpha H}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\beta H^2}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \qquad \text{при} \qquad y = -H, \qquad (4.3.8)$$

де $\beta = A_2 \mathrm{Kn}^2$.

Введемо безрозмірні параметри у такому вигляді

$$Y = \frac{y}{H}, \qquad U = \frac{u}{E}, \qquad \theta = \frac{a\phi}{GH^2 E}, \qquad E = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{H^2}{\mu}, \; M = (\mathrm{Da})^{-1/2}.$$

Використовуючи ці визначення, рівняння (4.3.3) та (4.3.4) можна переписати наступним чином

$$\frac{d^2 U}{dY^2} - MU + 1 = 0, \qquad (4.3.9)$$

$$\frac{d^2 \theta}{dY^2} + U = 0 \qquad (4.3.10)$$

.

Перетворення граничних умов першого порядку (4.3.5), (4.3.6) до безрозмірної форми при $A_2 = 0$ призводить до

$$U = -\alpha \frac{dU}{dY}, \qquad \theta = -\frac{\alpha}{\mathrm{Pr}} \frac{d\theta}{dY} \quad \text{при} \quad Y = 1, \qquad (4.3.11)$$

$$U = \alpha \frac{dU}{dY}, \qquad \theta = \frac{\alpha}{\mathrm{Pr}} \frac{d\theta}{dY} \quad \text{при} \quad Y = -1. \qquad (4.3.12)$$

Граничні умови проковзування другого порядку (4.3.7), (4.3.8) можна переписати як

$$U = -\alpha\frac{dU}{dY} + \beta\frac{d^2U}{dY^2},\ \theta = -\frac{\alpha}{\mathrm{Pr}}\frac{d\theta}{dY} + \frac{\beta}{\mathrm{Pr}}\frac{d^2\theta}{dY^2} \qquad \text{при } Y = 1, \tag{4.3.13}$$

$$U = \alpha\frac{dU}{dY} + \beta\frac{d^2U}{dY^2},\quad \theta = \frac{\alpha}{\mathrm{Pr}}\frac{d\theta}{dY} + \frac{\beta}{\mathrm{Pr}}\frac{d^2\theta}{dY^2} \qquad \text{при } Y = -1. \tag{4.3.14}$$

В результаті інтегрування диференціального рівняння (4.3.9) отримано загальне рішення для розподілу швидкостей U. Ці загальні рішення справедливі для граничних умов як першого, так і другого порядку.

$$U = \frac{1}{M} + C_1\cosh\left(\sqrt{M}Y\right) + C_2\sinh\left(\sqrt{M}Y\right),$$

де C_1 і C_2 - константи інтегрування, які можна знайти з відповідних граничних умов. Розглянемо рішення для різних видів граничних умов проковзування. Для граничних умов першого порядку (4.3.12), (4.3.13) рішення для розподілу профілю швидкості приймає наступний вигляд

$$U = \frac{1}{M}\left(1 - \frac{\cosh\left(\sqrt{M}Y\right)}{\cosh\left(\sqrt{M}\right) + \sqrt{M}\alpha\sinh\left(\sqrt{M}\right)}\right) \quad . \tag{4.3.15}$$

Для граничних умов другого порядку(4.3.13), (4.3.14)

$$\begin{aligned} U = {} & \left(\left(\cosh\left(\sqrt{M}(1+Y)\right) - \sinh\left(\sqrt{M}(1+Y)\right)\right)\left(\cosh\left(\sqrt{M}\right) + \cosh\left(\sqrt{M} + 2\sqrt{M}Y\right) + \sinh\left(\sqrt{M}\right) + \right. \\ & \left(-1 + \sqrt{M}\alpha + M\beta\right)\left(\cosh\left(\sqrt{M}Y\right) + \sinh\left(\sqrt{M}Y\right)\right) + \\ & \left.\left(-1 - \sqrt{M}\alpha + M\beta\right)\left(\cosh\left(\sqrt{M}(2+Y)\right) + \sinh\left(\sqrt{M}(2+Y)\right)\right) + \sinh\left(\sqrt{M} + 2\sqrt{M}Y\right)\right) / \\ & \left(2\left(-M\cosh\left(\sqrt{M}\right) + M^2\beta\cosh\left(\sqrt{M}\right) - M^{3/2}\alpha\sinh\left(\sqrt{M}\right)\right)\right) \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

Рішення для функції U(Y), отримані таким чином, можуть бути використані для отримання розподілу температур θ(Y) з рівняння (4.3.10). Підставляючи (4.3.15)

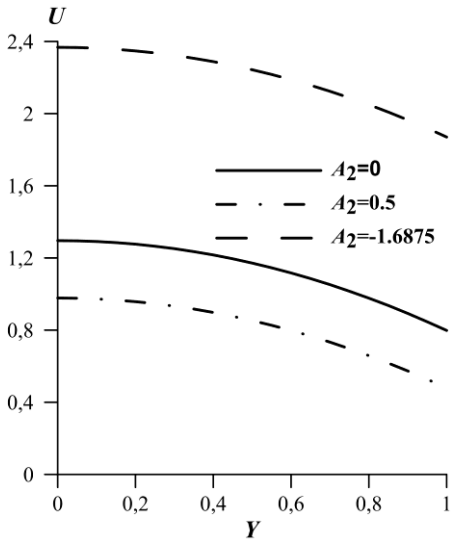
в рівняння (4.3.10) та вирішуючи його з граничними умовами першого порядку, отримаємо

$$\theta = \frac{1}{2M^2\,\mathrm{Pr}}\left(-2 + M\left(\mathrm{Pr} - \mathrm{Pr}\,Y^2 + 2\alpha\right) + \frac{-2\left(-1+\mathrm{Pr}\right)\cosh\left(\sqrt{M}\right) + 2\,\mathrm{Pr}\cosh\left(\sqrt{M}Y\right)}{\cosh\left(\sqrt{M}\right) + \sqrt{M}\,\alpha\sinh\left(\sqrt{M}\right)}\right).$$

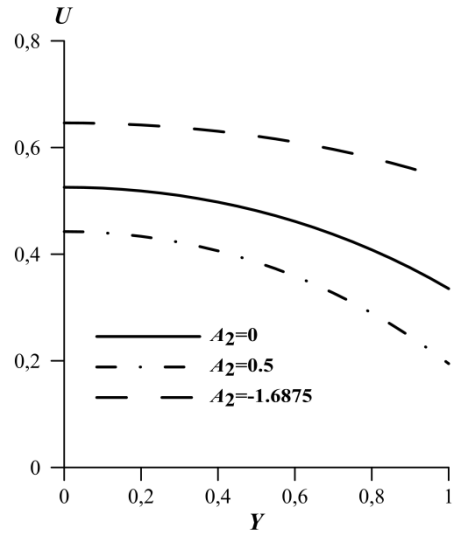
Підставляючи рівняння (4.3.16) в (4.3.10) і вирішуючи його з граничними умовами другого порядку, профіль розподілу температур має вигляд

$$\theta = \frac{1}{2M^2\,\mathrm{Pr}}\left(2 + M\left(\mathrm{Pr}\left(-1+Y^2\right) - 2\alpha + 2\beta\right) + \frac{-2\cosh\left(\sqrt{M}\right)\left(-1+\mathrm{Pr}\right) + 2\cosh\left(\sqrt{M}Y\right)\mathrm{Pr}}{\left(-1+M\beta\right)\cosh\left(\sqrt{M}\right) - \sqrt{M}\,\alpha\sinh\left(\sqrt{M}\right)}\right).$$

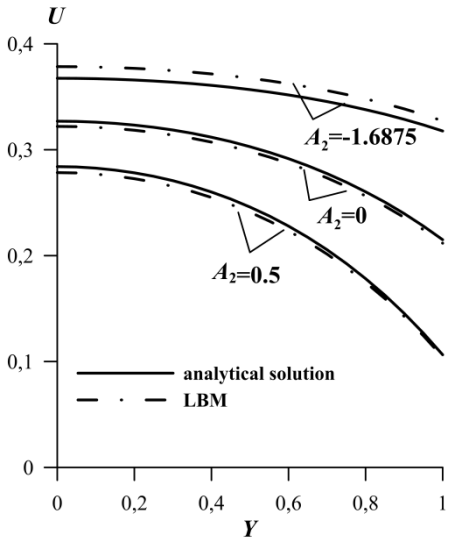
На рисунку 4.3.2 показано профілі швидкості з граничними умовами другого порядку для значень констант A_2 = 0, A_2 = 0,5, A_2 = -1,6875 при постійному значенні числа Kn = 0,2. Тут і далі значення A_2 = 0 означає випадок рішення з граничними умовами першого порядку.



а)



б)

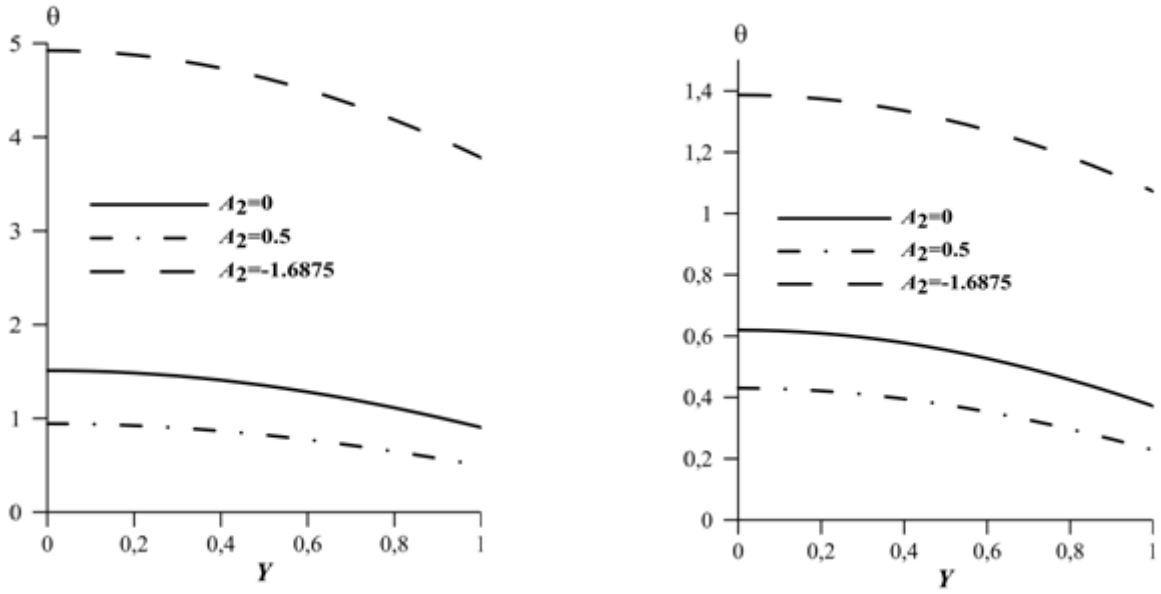


в)

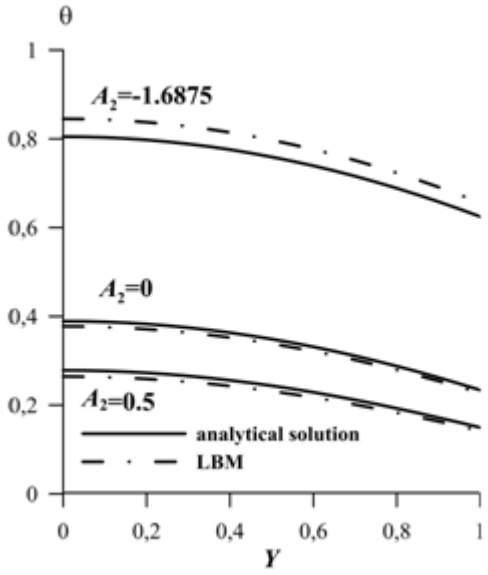
Рис.4.3.2. Вплив параметра M та A_2 на профіль швидкості при: а) M = 0,01; б) M = 5; в) M = 10

Як обговорювалося вище, ефект проковзування призводить до стрибка швидкості і температури на стінках мікроканалу. Зі зменьшенням пористості швидкість потоку зменшується, при цьому зменшується стрибок швидкості на стінці. При негативному значенні константи A_2 профіль швидкості має більш заповнену форму, стрибок швидкості на стінці більш значний. Зміна параметра A_2 від негативного значення до позитивного призводить до зменшення швидкості проковзування (стрибка швидкості) і зменшення локальної швидкості в центральній частині каналу. На малюнку 4.4.3(в) показано порівняння результатів аналітичного рішення з результатами обчислень, отриманих на основі методу LBM. При $A_2 \geq 0$ і $A_2 = 0$ отримані результати добре узгоджуються, різниця між ними не перевищує 1%. При $A_2 < 0$ розбіжність більш помітно. При $A_2 < 0$ результати чисельного моделювання перевищують аналітичне рішення, тоді як при $A_2 \geq 0$ аналітична модель дає значення, які вище чисельних результатів. Вочевидь, що расходження, що виникає при $A_2 < 0$, можна пояснити впливом граничних умов другого порядку (2.2.11) для методу LBM, який пов'язує швидкість на стінці зі швидкостями в комірках, відокремлених від комірок на стінці для першого та другого кроків уздовж вісі y. Обчислення швидкості на другому етапі призводить до накопичення числових

помилок. Це є причиною невідповідності між чисельними і аналітичними результатами.



а) б)



в)

Рис.4.3.3. Вплив параметра M та A_2 на профіль температури при: а) M = 0,01; б) M = 5; в) M = 10

На рис. 4.3.3 показано вплив параметру пористості і різних значень констант A_2 на профілі температури. З рисунка видно, що при всіх значеннях параметру пористості зміна A_2 від негативного до позитивного значення призводить до

зменшення різниці температур на стінці і в центрі каналу. Збільшення параметра M також призводить до вирівнювання профілю температури. Локальні температури течії в поперечному перерізі каналу прагнуть до температури стінки, а скачки температури на стінці слабшають. Як і у випадку з профілями швидкості, порівняння чисельних і аналітичних результатів показало, що розбіжність між ними більш помітно при $A_2 < 0$.

Розглянемо поведінку коефіцієнта тепловіддачі в залежності від безрозмірних параметрів. Нормоване число Нуссельта для плаского каналу визначається відповідно до формул (4.1.16) - (4.1.21).

Далі розглядаються результати рішення для коефіцієнта тепловіддачі з різними видами граничних умов проковзування. Граничні умови другого порядку (4.3.13), (4.3.14) для плаского мікроканалу дають наступні співвідношення

$$\mathrm{Nu} = (48M^2\,\mathrm{Pr}((-1+M\beta)\cosh(\sqrt{M})-\sqrt{M}\,\alpha\sinh(\sqrt{M}))(\sqrt{M}\,(-1+M\beta)\cosh(\sqrt{M})+ (1-M\alpha)\sinh(\sqrt{M})))/ (2\sqrt{M}\,(-3\alpha+3M(\alpha-M\alpha^3+M\beta^2(1-M\beta)+\alpha^2(2+M\beta)+ \alpha\beta(-1+M(-2+M\beta)))+\mathrm{Pr}(-9-6\alpha+M(1-M\alpha^2+6\beta+M\beta(-2+M\beta)))+ 2\sqrt{M}\,(3\alpha+3M(M\alpha^3+M\beta^2(1-M\beta)-\alpha^2(2+M\beta)+\alpha(1+\beta+M\beta(-2+M\beta)))+ \mathrm{Pr}(6(-1+\alpha)+M(1+6\beta+M(\alpha^2+\beta(-2+M\beta)))))\cosh(2\sqrt{M})+(6M(2\alpha(-1+M\alpha)+ M\alpha(1-2M\alpha)\beta+M(-1+2M\alpha)\beta^2)+\mathrm{Pr}(15-4M(3\beta+\alpha(3+M(-1+M\beta)))))\sinh(2\sqrt{M}))$$

Для граничних умов першого порядку (4.3.11), (4.3.12) рішення приймають наступний вигляд

$$\mathrm{Nu} = (24M^2\,\mathrm{Pr}(\sqrt{M}(1+\alpha-M\alpha^2)+\sqrt{M}(1+\alpha(-1+M\alpha))\cosh(2\sqrt{M})+ (-1+2M\alpha)\sinh(2\sqrt{M})))/ (-2\sqrt{M}(\mathrm{Pr}(9+6\alpha+M(-1+M\alpha^2))+3\alpha(1+M(-1+\alpha(-2+M\alpha))))+ 2\sqrt{M}(\mathrm{Pr}(-6+M+6\alpha+M^2\alpha^2)+3\alpha(1+M(1+\alpha(-2+M\alpha))))\cosh(2\sqrt{M})+ (12M\alpha(-1+M\alpha)+\mathrm{Pr}(15+4(-3+M)M\alpha))\sinh(2\sqrt{M}))$$

.

При течії без проковзування (Kn = 0) нормоване число Нуссельта визначається рівнянням

$$\mathrm{Nu} = \frac{48M^2 \cosh\left(\sqrt{M}\right)\left(\sqrt{M}\cosh\left(\sqrt{M}\right) - \sinh\left(\sqrt{M}\right)\right)}{2 - (9+M)\sqrt{M} + 2(-6+M)\sqrt{M}\cosh\left(2\sqrt{M}\right) + 15\sinh\left(2\sqrt{M}\right)}.$$

На рисунку 4.3.4 показано вплив пористості і параметра α с граничними умовами першого порядку ($A_2 = 0$) на Nu / Nu_0, (де Nu_0 - число Нуссельта при $M = 0$).

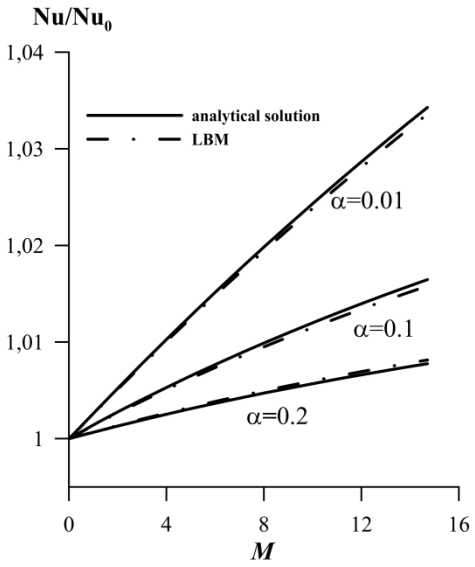


Рис. 4.3.4. Залежність нормованого числа Нуссельта від параметрів M і α

Розрахунки показали, що зі зменьшенням пористості інтенсивність теплообміну збільшується, що пов'язано зі зменшенням стрибка температури на стінці. У міру збільшення значень числа Кнудсена (α) відносне число Нуссельта зменшується, тому що починає переважати ефект проковзування. Це викликає погіршення умов теплової взаємодії між рідиною і стінкою. З рисунку також видно, що порівняння аналітичних та чисельних розрахунків дають добре узгодження.

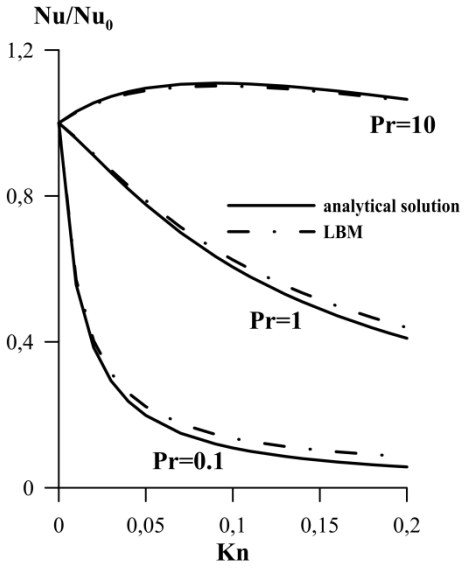


Рис. 4.3.5. Залежність нормованого числа Нуссельта від числа Kn та числа Pr

На рис.4.3.5 показано вплив числа Прандтля і числа Кнудсена на тепловіддачу (де Nu_0 - число Нуссельта при Kn = 0) з граничними умовами першого порядку в пористих мікроканалах при M = 5. Як обговорювалося вище, ефект проковзування зменшує відносний коефіцієнт тепловіддачі. З ростом числа Прандтля цей ефект зменшується, оскільки зменшується стрибок температури на стінці. При високих числах Прандтля цей стрибок практично нівелюється, що призводить до збільшення тепловіддачі. Розрахунки показали, що ця тенденція зберігається при всіх значеннях параметра M.

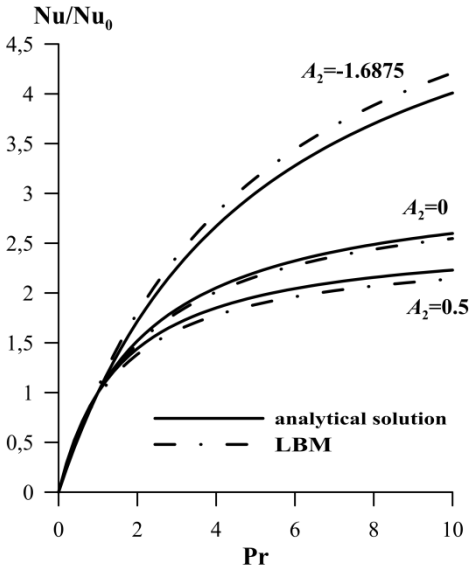


Рис. 4.3.6. Залежність нормованого числа Нуссельта від числа Pr та параметра A_2

Результати розрахунків нормованого числа Нуссельта для граничних умов другого порядку ($A_2 \neq 0$) в пористих мікроканалах при $M = 5$ представлені на рис.4.3.6. При малих значеннях числа Прандтля (Pr ≈ 1) вплив параметра A_2 не спостерігається. При $A_2 < 0$ ефекти другого порядку призводять до збільшення нормованого числа Нуссельта, тоді як при $A_2 > 0$ значення нормованого числа Нуссельта зменшується в порівнянні з випадком A_2=0. Як і у випадку з профілями швидкості і температури, порівняння аналітичних і чисельних результатів показує, що при $A_2 < 0$ невідповідність між ними більш виражено і результати чисельного розрахунку перевищують результати аналітичне моделювання.

4.4. Примусова конвекція у циліндричному мікроканалі

Розглянемо результати дослідження теплообміну та гідродинаміки сталої течії при примусової конвекції в круглому мікроканалі, радіус якого r_0 (рис.4.4.1), заповненому пористим середовищем з урахуванням граничних умов проковзування першого та другого порядку [1].

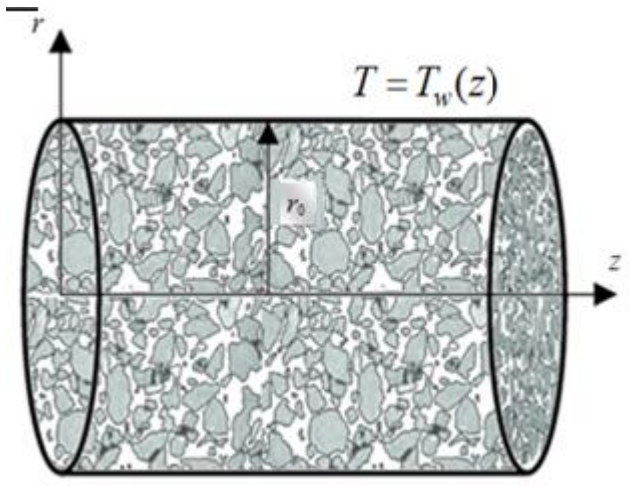


Рис. 4.4.1. Схематичне зображення круглого мікроканалу

Фізична постановка задачі подібна задачі, викладеної в п. 4.3.

Течія у мікроканалі при таких умовах описується наступними рівняннями в циліндричних координатах

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)-\frac{\mu}{K}u, \qquad (4.4.1)$$

$$u\frac{\partial T}{\partial z}=a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right). \qquad (4.4.2)$$

Для круглого мікроканалу температура стінки вдовж вісі z змінюється за лінійним законом, тобто $T_w = Gz$, що відповідає постійному тепловому потоку на стінці для сталої течії. Профіль температури теплоносія в каналі змінюється лінійно, так що різниця температур для круглого каналу стає незалежною від координати z

$$T(z,r)-T_w=T(z,r)-Gz=\phi(r).$$

Для граничних умов першого порядку згідно рівнянь (4.3.1) та (4.3.2), коли $A_1 = 1$ і $A_2 = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial r}=0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial r}=0 \qquad \text{при} \qquad r=0, \qquad (4.4.3)$$

$$u=-\alpha r_0\frac{\partial u}{dr}, \qquad \phi=-\frac{\alpha r_0}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial \phi}{\partial r} \qquad \text{при} \qquad r=r_0. \qquad (4.4.4)$$

де $\alpha=\mathrm{Kn}=\dfrac{L}{r_0}$ - число Кнудсена.

Граничні умови другого порядку визначаються співвідношеннями

$$\frac{\partial u}{\partial r}=0, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial r}=0 \qquad \text{при} \quad r=0, \qquad (4.4.5)$$

$$u = -\alpha r_0 \frac{\partial u}{\partial r} + \beta r_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}, \qquad \phi = -\frac{\alpha r_0}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\beta r_0^2}{\mathrm{Pr}} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \qquad \text{при} \quad r = r_0 . \tag{4.4.6}$$

де $\beta = A_2 \mathrm{Kn}^2$.

Безрозмірні параметри для даної задачі мають вигляд

$$R = \frac{r}{r_0}, \qquad U = \frac{u}{E}, \qquad \theta = \frac{a\phi}{G r_0^2 E}, \qquad E = \left(-\frac{dp}{dz} \right) \frac{r_0^2}{\mu}, \quad M = (\mathrm{Da})^{-1/2}.$$

В результаті обезрозмірювання рівняння (4.4.1) та (4.4.2) перетворюються

$$\frac{d^2 U}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} - MU + 1 = 0, \tag{4.4.7}$$

$$\frac{d^2 \theta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\theta}{dR} + U = 0. \tag{4.4.8}$$

Після приведення граничних умов першого порядку (4.4.3) та (4.4.4) до безрозмірної форми при $A_2 = 0$ одержуємо

$$\frac{dU}{dR} = 0, \qquad \frac{d\theta}{\partial R} = 0 \qquad \text{при} \qquad R = 0,$$

$$U = -\alpha \frac{dU}{dR}, \qquad \theta = \frac{\alpha}{\mathrm{Pr}} \frac{d\theta}{dR}, \qquad \text{при} \qquad R = 1.$$

Безрозмірна форма граничних умов другого порядку має вигляд

$$\frac{dU}{dR} = 0, \qquad \frac{d\theta}{\partial R} = 0 \qquad \text{при} \qquad R = 0, \tag{4.4.9}$$

$$U = -\alpha \frac{dU}{dR} + \beta \frac{d^2 U}{dR^2}, \qquad \theta = -\frac{\alpha}{\mathrm{Pr}} \frac{d\theta}{dR} + \frac{\beta}{\mathrm{Pr}} \frac{d^2 \theta}{dR^2} \qquad \text{при} \qquad R = 1. \tag{4.4.10}$$

В результаті інтегрування диференціального рівняння (4.4.7) отримано спільне рішення для розподілу швидкостей *U*.

$$U = \frac{1}{M} + C_1 I_0\left(\sqrt{M}R\right) + C_2 K_0\left(\sqrt{M}R\right),$$

де C_1, C_2 - константи інтегрування, що визначаються за допомогою відповідних граничних умов; I_0 та K_0 - модифіковані функції Бесселя.

Профіль швидкості з граничними умовами першого порядку має вигляд

$$U = \frac{1}{M} - \frac{I_0\left(\sqrt{M}R\right)}{MI_0\left(\sqrt{M}\right) + M^{3/2}\alpha I_1\left(\sqrt{M}\right)} \qquad (4.4.11)$$

Вирішуючи рівняння (4.4.8) з використанням (4.4.11) рішення для профілю розподілу температури с граничними умовами першого порядку виглядає як

$$\theta = \left(\left(\Pr\left(-4 + M - MR^2\right) + 2M\alpha\right)I_0\left(\sqrt{M}\right) + 4\Pr I_0\left(\sqrt{M}R\right) + \sqrt{M}\alpha\left(-4 + M\left(\Pr - \Pr R^2 + 2\alpha\right)\right)I_1\left(\sqrt{M}\right)\right) / \left(4M^2\Pr\left(I_0\left(\sqrt{M}\right) + \sqrt{M}\alpha I_1\left(\sqrt{M}\right)\right)\right)$$

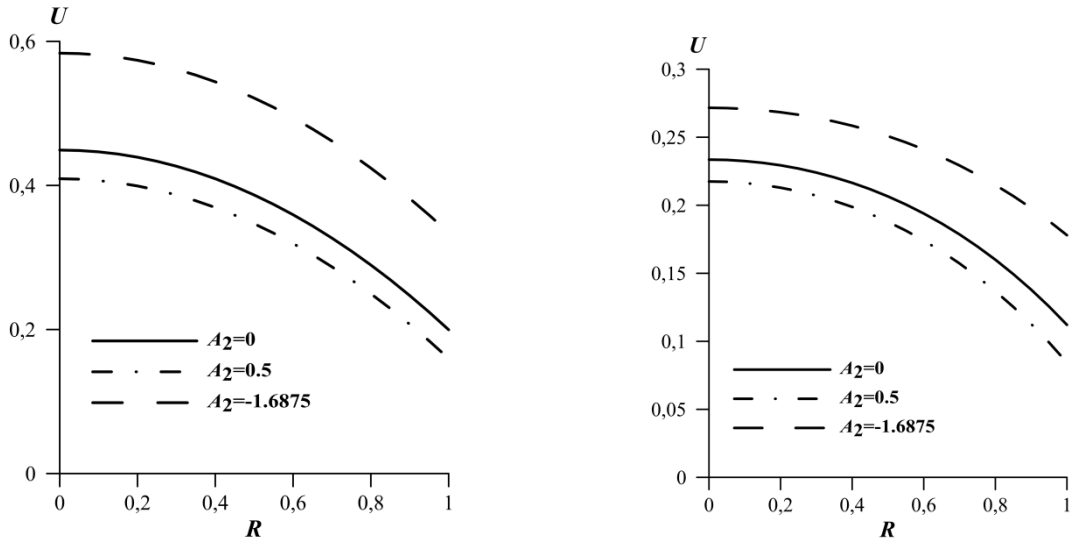
Профіль швидкості з граничними умовами другого порядку (4.4.9), (4.4.10) має вигляд

$$U = \frac{1}{M} + \frac{I_0\left(\sqrt{M}R\right)}{M\left(-1 + M\beta\right)I_0\left(\sqrt{M}\right) - M^{3/2}\left(\alpha + \beta\right)I_1\left(\sqrt{M}\right)}. \qquad (4.4.12)$$

Беручи до уваги останнє рішення (4.4.12), отримуємо рішення для профілю температури з граничними умовами другого порядку

$$\theta = \left(\left(-2M\left(\alpha - \alpha\beta M + M\beta^2\right) + \Pr\left(4 + M\left(-1 + R^2\right) + M^2\beta\left(1 - R^2\right)\right)\right)I_0\left(\sqrt{M}\right) - 4\Pr I_0\left(\sqrt{M}R\right) + \sqrt{M}\left(\left(\left(4 + M\Pr\left(-1 + R^2\right)\right)\alpha - 2M\alpha^2 + M\beta\left(\Pr\left(-1 + R^2\right) + 2\beta\right)\right)I_1\left(\sqrt{M}\right) - 2\sqrt{M}\beta I_2\left(\sqrt{M}\right)\right)\right) / \left(4M^2\Pr\left(\left(-1 + M\beta\right)I_0\left(\sqrt{M}\right) - \sqrt{M}\left(\alpha + \beta\right)I_1\left(\sqrt{M}\right)\right)\right)$$

Рисунок 4.4.2 показує вплив пористості та граничних умов проковзування другого порядку з різними значеннями констант A_2 при постійному значенні числа Кнудсена (Kn = 0,2).



а) б)

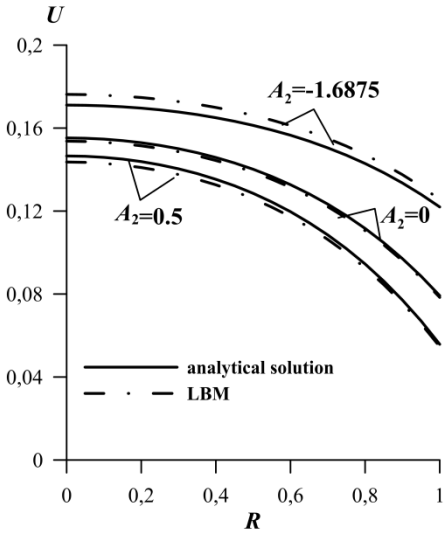


Рис.4.4.2. Вплив параметрів M та A_2 на профіль швидкості при: а) M = 0,01; б) M = 5; в) M = 10

Аналіз результатів показав, що вплив цих параметрів в мікроканалах з різною геометрією схож. Зростання параметра M зменшує ефект проковзування і швидкість

потоку в центрі каналу. Форма профілю швидкості більш заповнена при A_2 = -1,6875, вплив проковзування більш помітно. У міру зміни A_2 до позитивних значень стрибок швидкості на стінці зменшується. Різниця між аналітичними та чисельними розрахунками більш помітна при $A_2 < 0$.

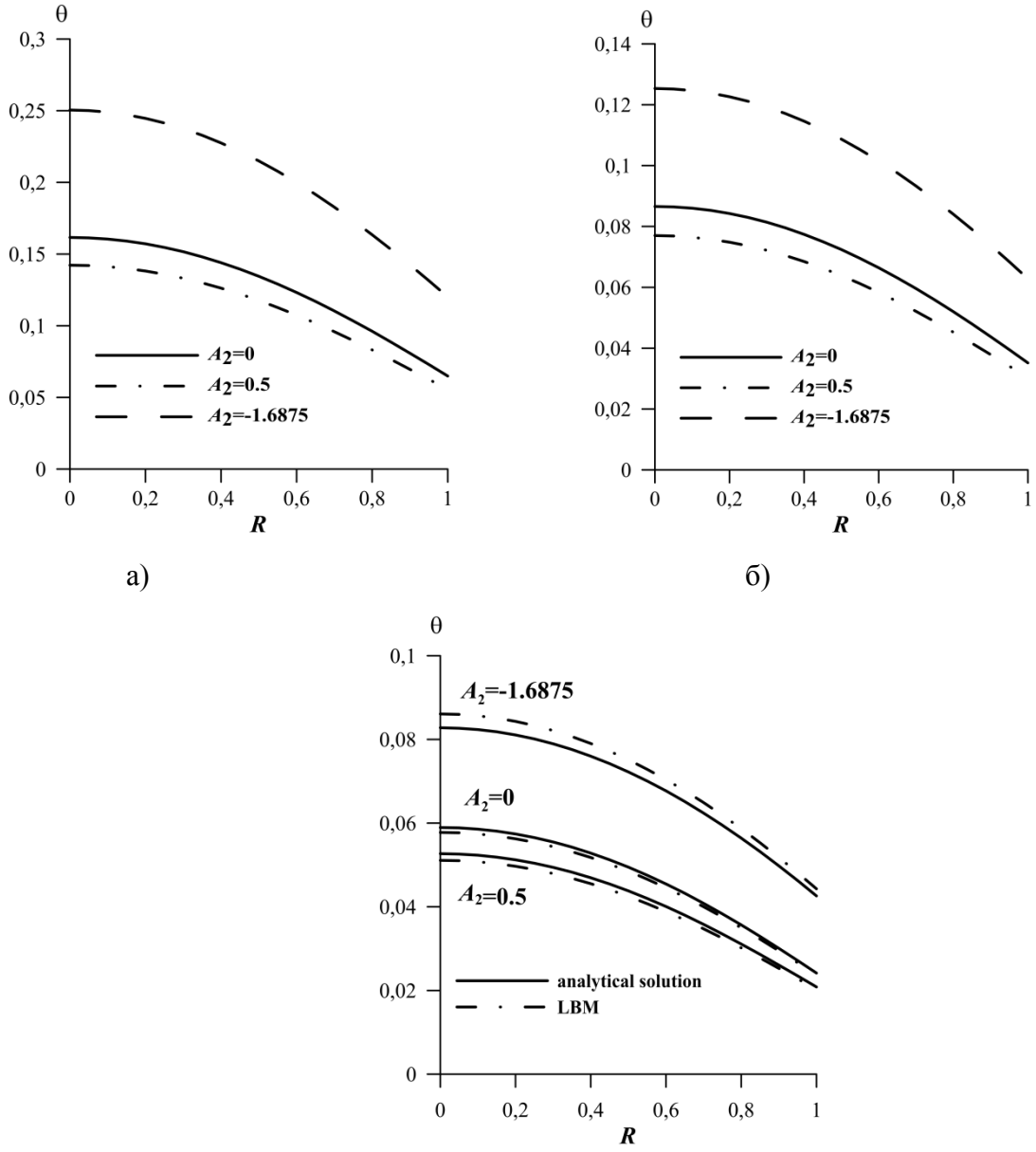


Рис.4.4.3. Вплив параметра M та A_2 на профіль температури при: а) M = 0,01; б) M = 5; в) M = 10

Як видно з показаних графіків збільшення коєфіцієнта A_2 призводить до зменшення різниці температур на стінці і в центрі каналу. Зменшення пористості (тобто зростання параметра M) призводить до збільшення заповнювання профілів

температури, також нівелюються скачки температури на стінці. Різниця між аналітичними та чисельними розрахунками більш помітна при $A_2 < 0$.

Далі проведемо аналіз інтенсивності теплообміну. Коефіцієнт тепловіддачі для круглого мікроканала обчислюється за допомогою рівнянь (4.2.10) - (4.2.13). Аналітичне рішення с граничними умовами другого порядку має вигляд

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Nu} = -\Big(\big(32M^3\,\mathrm{Pr}\big(-1+M\beta\big)I_0\sqrt{M} - \sqrt{M}\,(\alpha+\beta)I_1^2\big(\sqrt{M}\big)\\
&\left(\frac{1}{2M} + \frac{I_1\big(\sqrt{M}\big)}{M^{3/2}(-1+M\beta)I_0\big(\sqrt{M}\big) - M^2(\alpha+\beta)I_1\big(\sqrt{M}\big)}\right)\Big)\Big/\\
&\big(\big(-\mathrm{Pr}\big(-24+M+16M\beta-2M^2\beta+M^3\beta^2\big)-4M\big(\beta-M^2\beta^3+\alpha(-1+M\beta)^2\big)\big)I_0^2\big(\sqrt{M}\big)+\\
&\frac{1}{\sqrt{M}}2\big(\mathrm{Pr}\big(-24-M^2(\alpha+\beta)+M^3\beta(\alpha+\beta)+8M(\alpha+3\beta)\big)+\\
&4M\big(2\beta-M^2\beta^3+\alpha(2-3M\beta)+M\alpha^2(-1+M\beta)\big)\big)I_0\big(\sqrt{M}\big)I_1\big(\sqrt{M}\big)+\\
&4\big(-4+(-4+M)\mathrm{Pr}+2M(\alpha-\beta)\big)(\alpha+\beta)I_1^2\big(\sqrt{M}\big)-\big(4M\big(-2+M(\alpha-\beta)\big)(\alpha+\beta)^2+\\
&\mathrm{Pr}\big(8+M^2\alpha^2+4(4+M)\beta+M^2\beta^2+2\alpha(8+2M+M^2\beta)\big)\big)I_1^2\big(\sqrt{M}\big)\big)
\end{aligned},$$

де $\beta = A_2\mathrm{Kn}^2, \alpha = \mathrm{Kn}$.

Рішення с граничними умовами першого порядку приймає форму

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Nu} = (16M^2\,\mathrm{Pr}\big(I_0\big(\sqrt{M}\big)+\sqrt{M}\alpha I_1\big(\sqrt{M}\big)\big)\big(\sqrt{M}I_0\big(\sqrt{M}\big)+(-2+M\alpha)I_1\big(\sqrt{M}\big)\big)\Big/\\
&\big(\sqrt{M}\big((-24+M)\mathrm{Pr}+4M\alpha\big)I_0^2\big(\sqrt{M}\big)+\\
&2\big(4M\alpha\big(-2+M\alpha\big)+\mathrm{Pr}\big(24-8M\alpha+M^2\alpha\big)\big)I_0\big(\sqrt{M}\big)I_1\big(\sqrt{M}\big)+\\
&\sqrt{M}\big(4\alpha\big(-2+M\alpha\big)^2+\mathrm{Pr}\big(8+32\alpha+M^2\alpha^2\big)\big)I_1^2\big(\sqrt{M}\big)
\end{aligned},$$

де $\alpha = \mathrm{Kn}, \beta = 0$.

При течії без проковзування (Kn = 0) нормоване число Нуссельта визначається рівнянням

$$\mathrm{Nu} = \frac{16M^2I_0\big(\sqrt{M}\big)\big(\sqrt{M}I_0\big(\sqrt{M}\big)-2I_1\big(\sqrt{M}\big)\big)}{(-24+M)\sqrt{M}I_1^2\big(\sqrt{M}\big)+48I_0\big(\sqrt{M}\big)I_1\big(\sqrt{M}\big)+8\sqrt{M}I_1^2\big(\sqrt{M}\big)}.$$

На рисунку 4.4.4 показано вплив параметру пористості і параметра α с граничними умовами першого порядку (A_2 = 0) на Nu / Nu_0, (де Nu_0 - число Нуссельта при M = 0).

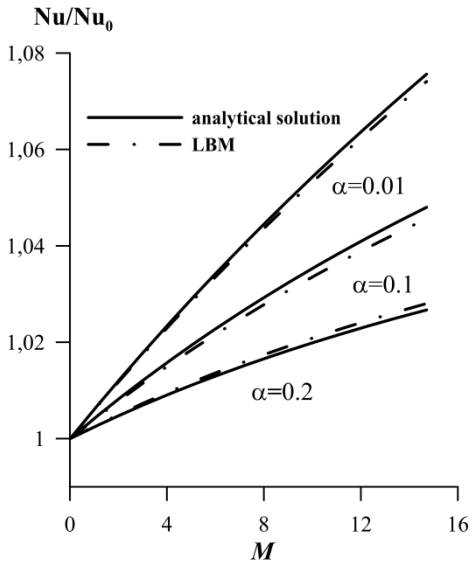


Рис. 4.4.4. Залежність нормованого числа Нуссельта від параметрів M і α

Аналізуючи результати, можна дійти висновку, що збільшення числа Кнудсена (α) викликає зменшення інтенсивності теплообміну. Це відбувається через підвищення стрибка температури на стінці, що, в свою чергу, призводить до погіршення умови теплової взаємодії між потоком і стінкою. Збільшення параметра M згладжує цей ефект та інтенсивність теплообміну підвищується.

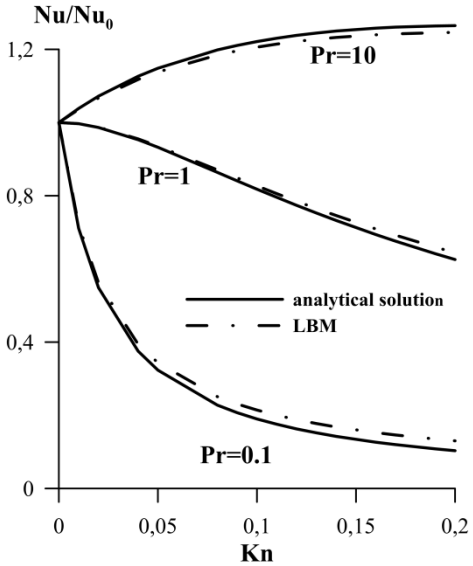


Рис. 4.4.5. Залежність нормованого числа Нуссельта від числа Kn та числа Pr

Рисунок 4.4.5 показує зміну коефіцієнта тепловіддачі в залежності від числа Прандтля і числа Кнудсена в пористих мікроканалах при M = 5 з граничними умовами проковзування першого порядку (A_2 = 0). Вплив числа Прандтля на теплообмін аналогічно вливу параметру пористості. З ростом числа Прандтля зменшується стрибок температури на стінці, що сприяє інтенсифікації тепловіддачі.

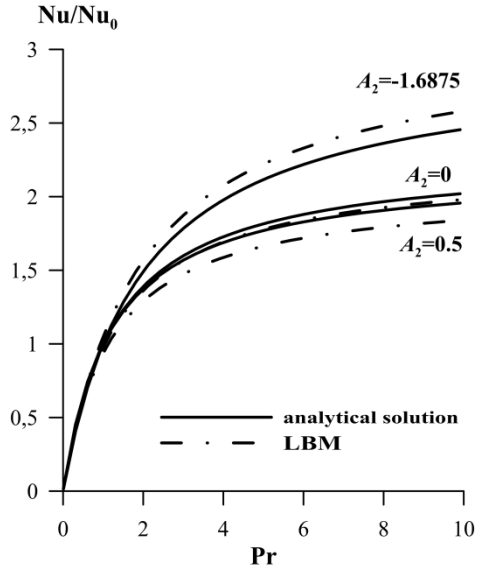


Рис. 4.4.6. Залежність нормованого числа Нуссельта від числа Pr та параметра A_2

На рис.4.4.6 показано вплив числа Прандтля та параметра A_2 на тепловіддачу (де Nu_0 - число Нуссельта при Pr = 0) з граничними умовами другого порядку ($A_2 \neq 0$) в пористих мікроканалах при M = 5. Як у випадку з пласким каналом, для каналу круглого перерізу при $A_2 < 0$ ефекти другого порядку призводять до збільшення відносного числа Нуссельта, тоді як при $A_2 > 0$ значення відносного числа Нуссельта зменшується в порівнянні з випадком течії при $A_2 = 0$. З рисунку також видно, що при малих значеннях числа Прандтля (Pr ≈ 1) вплив параметра A_2 не спостерігається, далі коєфіцієнт тепловіддачі зростає, що підтверджує висновки, зроблені раніше. Як і у випадку з профілів швидкості і температури, порівняння аналітичних і чисельних результатів для нормованого числа Нусссельта показує, що при A2 < 0

невідповідність між ними більш виражено і результати чисельного розрахунку перевищують результати аналітичного моделювання.

4.5. Висновки до розділу 4

У даному розділі представлені результати аналітичного рішення і чисельного моделювання на основі LBM змішаної та примусової конвекції в пласких та круглих мікроканалах, заповнених пористим середовищем для різних граничних умов проковзування.

Моделювання показало, що збільшення числа Кнудсена супроводжується стрибками швидкості та температури на стінці. Зростання числа Релея, числа Прандля та параметра *M* цій ефект нівелює. Вплив числа Релея переважає у центральній частині каналу. При високих числах Релея профілі швидкості демонструють М-подібну форму з точкою мінімуму в центрі каналу, тоді як профілі температури вирівнюються, температура потоку в поперечному перерізі прагне до температури стінки.

Використовуючи аналітичне рішення можна отримати число Нуссельта при перебігу чистого середовища (M = 0) без проковзування (Kn = 0). Результати розрахунку свідчать, що для мікроканалу плоского перерізу Nu_{00} = 8.23, для круглого - Nu_{00} = 4.45. Динаміка зміни відносного числа Нуссельта показує, що при малих числах Релея збільшення параметра пористості M збільшує тепловіддачу та гідравлічний опір. Але при великих значення числа Релея тренд змінюється на протилежний. Крім того, починаючи з певних значень числа Релея, збільшення числа Кнудсена призводить до збільшення гідравлічного опору. Ця тенденція обумовлена тим, що збільшення числа Релея тягне за собою збільшення градієнта швидкості на стінці.

ВИСНОВКИ

1. Розвинуто чисельно - аналітичний підхід дослідження процесів теплообміну, гідродинаміки та нестійкості в пористих мікромасштабних системах та мікроканальних пристроях.
2. Проведено аналіз нестійкості течії на основі тривимірних лінійних збурень в пласкому пористому каналі. Показано, що збільшення критичних значень числа Рейнольдса відбувається зі зменшенням пористості, що зумовлено зростанням ступеню заповнювання профілю швидкості.
3. На основі ренормгрупового підходу отримано вираз для турбулентної в'язкості для визначення критерію нелінійної нестійкості. Показано, що тривимірний потік менш стійкий у порівнянні з двовимірним.
4. Розвинуто математичну модель гідродинамічної нестійкості розрідженого потоку в пласкому пористому каналі. Показано, що збільшення числа Кнудсена і зменшення пористості призводить до зменшення критичного хвильового числа та критичних значень числа Рейнольдса.
5. Знайдено, що збільшення коефіцієнта проковзування, пористості середовища і ширини каналу призводить до збільшення критичних значень числа Діна і критичної довжини хвилі обурення.
6. Розвинуто модель теплообміну та гідродинаміки при змішаній конвекції в пористих мікроканалах. Розрахунки показали:
   - Вплив числа Кнудсена більш виражено в пристіночній області, у центральній частині каналу переважає вплив числа Релея. Зі зменшенням пористості стрибок швидкості на стінці зменшується;
   - Для всіх комбінацій безрозмірних критеріїв збільшення числа Кнудсена знижує інтенсивність теплообміну. З ростом числа Релея існує інверсія впливу пористості на тепловіддачу. При малих числах Релея зменшення пористості збільшує теплопередачу, а при великих значеннях чисел Релея тенденція змінюється на протилежну;
   - Для низьких чисел Релея в міру збільшення числа Кнудсена гідравлічний опір зменшується (зі збільшенням ефекту проковзування) і зростає зі зменшенням

пористості. Починаючи з певних значень числа Релея (Ra>400) збільшення числа Кнудсена призводить до збільшення гідравлічного опору із-за збільшення градієнта швидкості на стінці;

7. Розвинено модель теплообміну та гідродинаміки при примусовій конвекції в пористих мікроканалах з граничними умовами проковзування другого порядку. Розрахунки показали, що зменшення пористості викликає посилення теплопередачі. При високих числах Прандтля стрибок температури на стінці практично вироджується, що приводить до збільшення швидкості передачі тепла зі збільшенням числа Кнудсена призводить до збільшення швидкості передачі тепла. При малих числах Прандтла (Pr≤1) вплив параметрів другого порядку не спостерігався. Зі збільшенням числа Pr при A_2<0 ефекти другого порядку призводять до збільшення відносного числа Нуссельта, тоді як при A_2>0 значення відносного числа Нуссельта зменшується в порівнянні з випадком A_2=0.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Nield D.A. and Bejan A. Convection in Porous Media. 4th Edition, New York: Springer. 2013. 800 p.
2. Vafai K. Handbook of Porous Media. 3rd edition, CRC Press. 2015. 59 p.
3. Hassanizadeh S.M. Theory and Applications of Transport in Porous Media. Springer International Publishing. 2017. 59 p.
4. Косой Б.В. Факторы интенсификации кипения в двухфазных системах терморегулирования. Холодильна техніка та технологія. 2018. Т. 54, № 4. С. 42 – 48.
5. Коновалов Д.А. Конвективный однофазный теплоперенос в компактных микроканальных системах охлаждения поверхностей с интенсивным тепловыделением: дис. докт. технічних наук: 01.04.14 / Технічна теплофізика та промислова теплоенергетика. В., 2018. 367 с.
6. Горячий интерес к новейшим методам охлаждения [Электронный ресурс]: 2014. Режим доступа: http://www.rlocman.ru/review/article.html?di=151013.
7. Шанин Ю.И. Теплоотдача компактных систем охлаждения лазерных зеркал. Труды Шестой Российской национальной конференции по теплообмену. М.: Издательский дом МЭИ. 2014. Т.3. С. 245 – 246.
8. Шанин Ю.И. Теплоотдача компактных систем охлаждения лазерных зеркал. Тепловые процессы в технике. М.: Наука и технологии. 2015. №.4. С. 166 – 171.
9. Single-phase, miniaturized convective cooling [Электронный ресурс]: 2008. Режим доступа: http://www.zurich.ibm.com/st/cooling/convective.html.
10. Козулин И.А. Экспериментальное исследование газожидкостного течения в микроканалах с различной ориентацией: автореф. канд. физ. мат. наук: 01.02.05 / Механика жидкости, плазмы и газа. Н., 2013. 23с.
11. Власов М.Н., Корсун А.С., Маслов Ю.А., Меринов И.Г., Рачков В.И., Харитонов В.С. Определение параметров интегральной модели турбулентности применительно к расчёту обтекания стержневых сборок в приближении пористого тела. Теплофизика и аэромеханика. 2016. Т.23, №2. С.209 – 218.

12. Singh H., Myong R.S. Critical Review of Fluid Flow Physics at Micro- to Nano-scale Porous Media Application in the Energy Sector. Advances in Materials Science and Engineering. 2018. V.1. P.1– 31.
13. Dhir V.K. Boiling and two – phase flow in porous media. Annu. Rev. Heat Transfer.1994. V.5. P.303 – 350.
14. Козлов В. В., Пелевин Ф. В. Использование теплообменных аппаратов с пористыми вставками в системе сервиса. Сервис в России и за рубежом. 2012. № 8. С.165 – 171.
15. Сокол В.А., Яковцева В.А., Шиманович Д.Л. Особенности применения пористых оксидов алюминия. Доклады БГУИР. 2012. №2, 64. С.21 – 27.
16. Mawatari K. Microflow systems for chemical synthesis and analysis: approaches to full integration of chemical process. Journal of Flow Chemistry. 2012. V.1, Issue1. P. 3 – 12.
17. Koo J.M., Koo J.M., Goodson K. E. Integrated microchannel cooling for three-dimensional electronic circuit architectures. Journal of Heat Transfer. 2005. V.127, Issue1. P.49 – 58.
18. Yang P., Rizvi A. H., Messer B., Chmelka B. F., Whitesides G. M., Stucky G. D. Patterning porous oxides within microchannel networks. Advanced Materials. 2001. Vol.13, Issue 6. P.427–431.
19. Miyazaki M., Maeda H. Microchannel enzyme reactors and their applications for processing. Trends in Biotechnology. 2006. Vol.24, Issue 10. P.463 – 470.
20. Nivedita N., Ligrani P., Papautsky I. Dean Flow Dynamics in Low-Aspect Ratio Spiral Microchannel. Scientific Reports. 2017. Vol. 7. P.1 – 10.
21. Bhagat A.A., Kuntaegowdanahalli S.S., Papautsky I. Continuous particle separation in spiral microchannels using dean flows and differential migration. Lab Chip. 2008. Vol.8. P.1906 – 1914.
22. Данилов В.А. Моделирование тепловых процессов в пористых материалах и исследования их теплогидродинамических характеристик: дис. к – та техн. наук: 01.4.11/ ФГБОУ ВПО. К., 2012. 212 с.

23. Zili-Ghedira L., Gouider H., Nasrallah S. B. Numerical simulation of heat and mass transfer in humidifiers and cooling towers. Journal of Porous Media. 2017. V. 20,1. P.19 – 27.
24. Sauret A., Barney E.C., Perro A., Villermaux E., Stone H.A. Clogging by sieving in microchannels: Application to the detection of contaminants in colloidal suspensions. Applied Physics Letters. 2014. V.105,7. 074101.
25. Liedtke A.K., Scheiff F., Bornette F. , Philippe R., Agar D.W., and Bellefon C. Liquid–Solid Mass Transfer for Microchannel Suspension Catalysis in Gas–Liquid and Liquid–Liquid Segmented Flow. Ind. Eng. Chem. Res. 2015. V.54,17. P.4699 – 4708.
26. Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V., Dmitrenko N.P., Kravchuk A.V., Shevchuk V.I. Mixed convection in a vertical flat microchannel. Int J Heat Mass Transf . 2017. V.106. P.1164 – 73.
27. Avramenko A.A., Tyrinov A.I., Shevchuk I.V., Dmitrenko N.P., Kravchuk A.V., Shevchuk V.I. Mixed convection in a vertical circular microchannel. International Journal of Thermal Sciences. 2017. V. 121. P. 1 – 12.
28. Hooman K., Pourshaghaghy A., Ejlali A. Effects of viscous dissipation on thermally developing forced convection in a porous saturated circular tube with an isoflux wall. Applied Mathematics and Mechanics. 2006. V. 27,5. P. 617 – 626.
29. Hooman K., Bandpy M. G. Laminar dissipative flow in a porous channel bounded by isothermal parallel plates. Applied Mathematics and Mechanics. 2005. V. 26,5. P. 587 – 593.
30. Ranjbar – Kani A. A., Hooman K. Viscous dissipation effects on thermally developing forced convection in a porous medium: circular duct with isothermal wall. International Communications in Heat and Mass Transfer. 2004. V. 31,6. P. 897 – 907.
31. Safaei M.R., Togun H., Vafai K., Kazi S.N. and Badarudin A. Investigation of Heat Transfer Enchantment in a Forward – Facing contracting Channel using FMWCNT Nanofluids. Numerical Heat Transfer – Part A. 2014. V. 66. P.1321 – 1340.
32. Safaei M.R., Mahian O., Garoosi F., Hooman K., Karimipour A., Kazi S.N. and Gharehkhani S. Investigation of Micro and Nano-sized Particle Erosion in a 90º Pipe

Bend Using a Two-Phase Discrete Phase Model. The Scientific World Journal. 2014. Vol. 2014, Article ID 740578, 11 pages.

33. Safaei M.R., Rahmanian B. and Goodarzi M. Investigation of the Coal Diameter Effect on Pulverized Coal Combustion for Pollutant Reduction. The Journal of Mathematics and Computer Science. 2014. V. 12. P. 143 – 151.
34. Goodarzi M., Safaei M.R., Vafai K., Ahmadi G., Dahari M., Jomhari N. and Kazi S.N. Investigation of nanofluid mixed convection in a shallow cavity using a two-phase mixture model, International Journal of Thermal Sciences. 2014. V. 75. P. 204 – 220.
35. Rahmanian B., Safaei M.R., Kazi S.N., Ahmadi G., Oztop H. F. and Vafai K. Investigation of Pollutant Reduction by Simulation of Turbulent Non-Premixed Pulverized Coal Combustion. Applied Thermal Engineering. 2014. V.73. P. 1220 – 1233.
36. Togun H., Safaei M.R., Sadri R., Kazi S.N., Badarudin A., Hooman K. and Sadeghinezhad E. Numerical Simulation of Laminar to turbulent Nanofluid Flow and Heat Transfer over a backward-facing step. Applied Mathematics and Computation. 2014. V.239. P. 153 – 170.
37. Radiom M, Khakbaz M, Kermani MJ. Numerical and Analytical Calculation of Air Flow through an Open Channel Linked to a Porous Media. 2007. In15th Annual Conference of the CFD Society of Canada. P. 27– 31.
38. Чейлитко А.О. Зародження пор та їх вплив на властивості матеріалу. Технологический аудит и резерві производства. 2015. № 5/1 (25). С. 30 – 35.
39. Чейлытко А.А. Особенности влияния пористости на теплопроводность глиноземистых материалов: моногр. Дніпропетровськ: Середняк Т.К. 2015. 76с.
40. Чейлытко А.А. Формування теплофізичних властивостей елементів конструкцій теплового захисту шляхом створення прогнозованих пористих структур: монографія. Запоріжжя.:ЗДІА, 2017. 318 с.
41. Pavlenko A.M. Mathematical description of heat transfer through the body with a closed porosity. Energy, Energy saving and ration Nature Use. Kazimierz Pułaski University of Technology and Humanities in Radom. 2017. №1 – 2(7,8). P. 43 – 50.

42. Cheilytko, A.A. Creation of effective metallic thermal insulation constructions. Scientific Bulletin of National Mining University. 2017. №6, 162. P. 103 – 109.
43. Garg P., Purohit G.N., Chaudhary R.C. Similarity solution for combined free-forced convection past a vertical porous plate in a porous medium with a convective surface boundary condition. Int. J. of Applied Mechanics and Engineering. 2016. V.21,4. P. 827 – 836.
44. Leng Chuan, Xiao-Dong Wang, Tian-Hu Wang, Wei-MonYan. Fluid flow and heat transfer in microchannel heat sink based on porous fin design concept. Heat and Mass Transfer. 2015. V.65. P. 52 – 57.
45. Коновалов Д.А. Моделирование теплогидравлических характеристик микроканальных теплообменных элементов на основе матрицы монокристал лов. Наука. Инновации. Технологии. 2017. №3. С.29 – 40.
46. Wang C.Y., Beckermann C. A two-phase mixture model of liquid-gas flow and heat transfer in capillary porous media-l. Formulation . 1993. In. J. Heat Mass Transfer.Vol. 36, №11. P. 2741 – 2158.
47. Wang C.Y. A fixed-grid numerical algorithm for two-phase flow and heat transfer in porous media. Numerical Heat Transfer. 1997. V. 32, I. 1. P. 85 – 105.
48. Кисеев В.М. Тепломассоперенос и фазовые превращения в мелкопористых капиллярных структурах: автореф. дис. дора физ – мат. наук: / Екатеринбург, 2001. 42 с.
49. Dehghan M., Valipour M. S., Saedodin S. Microchannels enhanced by porous materials: Heat transfer enhancement or pressure drop increment. 2016. Energy Conversion and Management. V.110. P. 22 – 32.
50. Guckenheimer J**.,** Holmes P.J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer 1st ed. 1983. Corr. 6th printing 2002 Edition. 2983. 462 p.
51. Dongari N., Agrawal A., Agrawal A. Analytical solution of gaseous slip in long microchannels. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2007. V.50. P. 3411–3421.

52. Xiao N., Elsnab J., Ameel T. “Microtube gas flows with second order slip flow and temperature jump boundary conditions. International Journal of Thermal Sciences. 2009. V. 48. P. 243 – 251.
53. Beskok A., Karniadakis G.E. A model for flows in channels, pipes and ducts at micro and nano scales. Microscale Thermophysical Engineering. 1999. V. **3**. P. 43 – 77.
54. Colin S., Lalonde P., Caen R.Validation of a Second-Order Slip Flow Model in Rectangular Microchannels. Heat Transfer Engineering. 2004. V. 25, №3. P. 23 – 30.
55. Rooholghdos S.A., Roohi E. Extension of a second order velocity slip/temperature jump boundary condition to simulate high speed micro/nanoflows. Computers and Mathematics with Applications. 2014. V. 67. P. 2029 – 2040.
56. Cercignani C., Lorenzani S. Variational derivation of second – order slip coefficients on the basis of the Boltzmann equation for hard-sphere molecules. Phys. Fluids. 2010. V. 22. P. 062004 – 1– 062004 – 8.
57. Gibelli L. Velocity slip coefficients based on the hard-sphere Boltzmann equation. J. Phys. Fluids. 2012. V. 24, №2. P. 022001
58. Kushwaha H.M., Sahu S. K. Analysis of gaseous flow in a micropipe with second order velocity slip and temperature jump boundary conditions. Heat Mass Transfer. 2014. V. 50, I. 12. P. 1649 – 1659.
59. Avramenko A. A., Kuznetsov A. V. Instability of a slip flow in a curved channel formed by two concentric cylindrical surface. European Journal of Mechanics B/Fluids. 2009. V.28, №6. P. 722 – 727.
60. Avramenko A. A., Tyrinov A. I., Shevchuk I. V., Dmitrenko N. P. Centrifugal instability of nanofluids with radial temperature and concentration non-uniformity between co-axial rotating cylinders. European Journal of Mechanics B/Fluids. 2016. V.60. P. 90 – 98.
61. Avramenko A. A., Tyrinov A. I., Shevchuk I. V., Dmitrenko N. P. Dean instability of nanofluids with radial temperature and concentration non-uniformity. Phys. Fluids. - 2016. – vol. 28. - pp. 034104-1 - 034104-16.

62. Avramenko A. A., Shevchuk I. V., Harmand S., Tyrinov A. I. Thermocapillary instability in an evaporating two-dimensional thin layer film. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2015. Vol. 91. P. 77 – 88.
63. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V., Basok B.I., Blinov D.G. Investigation of stability of a laminar flow in a parallel-plate channel filled with a fluid saturated porous medium. Phys. Fluids. 2005. Vol.17. P. 094102 – 1 – 094102 – 6.
64. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V., Nield D.A. Instability of slip-flow in a channel occupied by a hyper-porous medium. Journal of Porous Media. 2007. Vol. 10. P. 435 – 442.
65. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V. Renormalization group model of macroscopic turbulence in porous media. Transport in Porous Media. 2006. Vol. 63. P. 175 – 193.
66. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V. Flow in a Curved Porous Channel with a Rectangular Cross Section. Journal of Porous Media. 2008. Vol. 11. P. 241 – 246.
67. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V. Flow instability in a curved porous channel formed by two concentric cylindrical surfaces. Transport in Porous Media. 2007. Vol. 69. P. 373 – 381.
68. Beavers, G. S., Sparrow, E. M. and Rodenz, D. E. Influence of bed size on the flow characteristics and porosity of randomly packed beds of spheres. J. Appl. Mech. 1973. V. 40. 655 – 660.
69. Дмитренко Н. П. Нестационарные процессы теплообмена и гидродинамики в каналах, которые имитируют элементы активной зоны газоохлаждаемых реакторов стержневого и насыпного типов: дис. канд. тех. наук: 05.14.06 / Техническая теплофизика и промышленная теплоенергетика. К., 2011. 154 с.
70. К.Б. Циберкин О структуре поля скорости стационарного течения вблизи границыраздела однородной жидкости и пористой среды Бринкмана. Журнал технической физики. 2016. Т.86, №8. С. 62 – 67.
71. Lundgren T. S. Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres. J. Fluid Mech. 1972. V.51. P. 273 – 299.
72. Durlofsky L. and Brady J. F. Analysis of the Brinkman equation as a model for flow in porous media. Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 3329 – 3341.

73. Rubinstein J. Effective equations for flow in random porous media with a large number of scales. J. Fluid Mech. 1986.V.170. P. 379 – 383.
74. Lee K., Howell J.R. Forced convective and radiative transfer within a highly porous layer exposed to a turbulent external flow field. Proceedings of the 2th ASME/JSME Thermal Engineering Conference, San Diego California ASTE99-6304. 1987. P. 1 − 4.
75. Antohe B.V., Lage J.L. A general two-equation macroscopic model for incompressible flow in porous media. Int. J. Heat Mass Transfer.1997. № 40. P 3013 − 3024.
76. Getachev D., Minkowycz W.J., Lage J.L. A modified $k-\varepsilon$ model for turbulent flows of incompressible fluid in porous media. Int. J. Heat Mass Transfer. 2000. № 43. P. 2909 − 2915.
77. Masuka T., Takatsu Y. Turbulence model for flow in porous media. Int. J. Heat Mass Transfer. 1996. № 39. P. 2803 − 2890.
78. Takatsu Y. Masuka T. Turbulent Phenomena in flow through porous media. J. Porous media. 1998. № 1. P. 243 − 251.
79. Nakayama A. Kuwahara F. A macroscopic turbulence model for flow in porous media. ASME. J. Fluids Engng. 1999. № 121. P. 427 − 433.
80. Pedras M.H., de Lemous M.J.S. On the mathematical description and simulation of turbulent flow in a porous medium formed by an array of elliptic rods. ASME J. Fluids Engng. 2001. № 123. P. 941 − 947.
81. Pedras M.H. de Lemous M.J.S. Macroscopic turbulence modeling for incompressible flow through undeformable porous media. Int. J. Hrat Mass Transfer. 2001. № 44. P.1081 − 1093.
82. Pedras M.H. de Lemous M.J.S. Simulation of turbulent flow in porous media using a spatially periodic array and low Re two-equation closure. Num. Heat Hransfer. 2001. № 39. P. 35 − 59.
83. Nield D.A. Alternative models of turbulence in a porous medium, and related matters. ASME J. Fluids Engng. 2001. № 121. P. 427 − 433.
84. Lauga E., Brenner M. P., Stone H.A. Microfluidics: The No-Slip Boundary Condition. Handbook of experimental fluid dinamics. New York: Springer. 2006. 27p.

85. Gad-el-Hak M. The fluid mechanics of microdevices. J. Fluids Engineering. 1999. V. 121, №1. – P. 5 – 33.
86. Tretheway D.C., Meinhart C.D. A generating mechanism for apparent fluid slip in hydrophobic microchannels. Reprinted with permission from. Physics of Fluids. 2004. V. 16. – 1509.
87. Беляев А.В. Гидродинамические и электрокинетические течения вблизи супергидрофибных поверхностей: дис. канд.физ-мат наук: 01.04.07 / Физика конденсированного состояния. Москва, 2012. 125 с.
88. Tretheway D.C., Meinhart C.D. Apparent fluid slip at hydrophobic microchannel walls. Physics of Fluids. 2002. V.14, №3. P. 9 – 13.
89. Maxwell J.C. On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature. Philos. T. Roy. Soc. 1879. V. 170. P. 231 – 256.
90. Knudsen M. Die Gesetze der Molekularströmung und der inneren Reibungsströmung der Gase durch Röhren. Ann. Phys. 1909. V. 28. P. 75 – 130.
91. Millikan R.A. Coefficients of slip in gases and the law of reflection of molecules from the surfaces of solids and liquids. Phys. Rev. 1923. V. 21. P. 217 – 238.
92. Dyke K.S. The coefficients of viscosity and of slip of air and of carbon dioxide by the rotating cylinder method. Phys. Rev. 1923. V. 21. P. 250 – 265.
93. Chiang, S.F. Drag Forces on Rotating Cylinders at Low Pressures, Ph.D. Thesis, University of California, US. 1952.
94. Beams J.W., Young J.L., Moore. J.W. The production of high centrifugal fields. J. Appl. Phys.1946. V. 17. P. 886 – 890.
95. Kuhlthau A.R. Air friction on rapidly moving surfaces. J. Appl. Phys. 1949. V. 20. P. 217 – 223.
96. Schaaf SA, Chambre PL. Flow of rarefied gases. Princeton: Princeton University Press. 1961. 66p.
97. Gad-el-Hak M. The fluidmechanics of microdevices – the Freeman scholar lecture. ASME J Fluids Eng. 1999. V.121. P. 5 – 33.
98. Bird GA. Molecular gas dynamics and the direct simulation of gas flows. Oxford: Oxford University Press. 1994. 479p.

99. Bing Y.C., J. Sun, Min C. and Zeng – Yuan Guo. Molecular Momentum Transport at Fluid-Solid Interfaces in MEMS/NEMS: A Review. International Journal of Molecular Sciences. 2009. V.10. P. 4638 – 4706.
100. Cercignani, C. The Boltzmann Equation and Its Applications. Springer-Verlag: New York, NY, USA, 1988. 455 p.
101. Albertoni S., Cercignani C., Gotusso L. Numerical evaluation of the slip coefficient. Phys. Fluids. 1963. V.6. P. 993 – 996.
102. Loyalka S.K. Approximate method in kinetic theory. Phys. Fluids. 1971. V.14. P. 2291 – 2294.
103. Hadjiconstantinou N.G. Comment on Cercignani's second-order slip coefficient. Phys. Fluids. 2003. V.15. P. 2352 – 2354.
104. Bhatnagar E.P., Gross M. K. A Model for Collision Processes in Gases. I. Small Amplitude Processes in Charged and Neutral One-Component Systems. Physical Review. 1954. №94. P. 511 – 525.
105. Тирінов А. І. Тепломасообмін та гідродинаміка теплотехнічних мікро- та наносистем: дис. док. техніч. наук: 05.14.06 / Технічна теплофізика і промислова теплоенергетика. Київ, 2017. 358с.
106. Peng Y., Shu C., Chew Y.T. A 3D incompressible thermal lattice Boltzmann model and its application to simulate natural convection in a cubic cavity. *J*. Comput. Physics. 2004. V.193, №1. P. 260 – 274.
107. Tyrinov A.I., Avramenko A.A., Basok B.I., Davydenko B.V. Modeling of flows in a microchannel based on the Boltzmann lattice equation. J. Eng. Phys. Thermophys. 2012. V.85, №1. P. 65 – 72.
108. Liu C.H., Lin K.-H., Mai H.-C., Lin C.-A. Thermal boundary conditions for thermal lattice Boltzmann simulations. Computers & Mathematics with Applications. 2010. V.59, №7. P. 2178 – 2193.
109. Авраменко А. А., Басок Б. И., Дмитренко Н. П., Ковецкая М. М., Тыринов А. И., Давыденко Б. В.. Ренормализационно групповой анализ турбулентности. Киев. ТОВ «ЕКСПРЕС», 2013. 300 с.

110. Колмогоров А.Н. Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. Докл. АН СССР. 1941. Т.30, №4. С. 299 − 303.
111. Yakhot V., Orsag S.A. Renormalization group analysis of turbulence. Basic theory. J. Sci. Comp. 1986. V.1, № 1. P. 3 – 51.
112. Avramenko A.A., Kuznetsov A.V. Renirmalization Group Model of Lage-Scale Turbulence in Porous Media. Transrort in Porous Media. 2006. № 63. P 175 − 193.
113. McComb W.D. The physics of fluid turbulence. Oxford: Clarendon Press, 1992. 572 p.
114. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.736с.
115. Schlichting H., Gersten K. Boundary Layer Theory. 8th ed. Berlin. Springer, 2000. 799p.
116. Козлов Л.Ф., Цыганюк А.И., Бабенко В.В. и др. Формирование турбулентности в сдвиговых течениях. Киев: Наукова думка, 1985. 284 с.
117. Авраменко А. А., Дмитренко Н. П., Ковецкая Ю.Ю Неустойчивость потока в пористом микроканале. Промышленная теплотехника. 2017. Т. 39, № 1. С. 13 – 16.
118. Nield D.A. The stability of flow in a channel or duct occupied by a porous medium. Int. J. Heat Transfer. 2003. V. 46, №2. P.4351 – 4354.
119. Авраменко А.А., Тыринов А.И., Домашев В.Е., Ковецкая М.М., Сорокина Т.В., Дмитренко Н.П. Неустойчивость скользящего потока в криволинейном канале. Промышленная теплотехника. 2013. Т.35, №2. С. 11 – 16.
120. Orsag S.A. Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equitation. J. Fluid Mech. 1971. V.50. P. 689 – 703.
121. Lauga E., Cossu C.A. A note on the stability of slip channel flows. Phys. Fluids. 2005. V. 17, №8. P.088106 – 1 – 088106 – 4.

122. Avramenko A. O., Dmitrenko N. P., Kovetska Y.Y. Linear and nonlinear instability of flow in channel occupied porous media. Промышленная теплотехника. 2017. Т. 39, № 3. С. 40 – 46.
123. Ковецкая Ю.Ю., Скицько А.И., Сорокина Т.В. Неустойчивость проскальзывающего потока в пористом криволинейном микроканале. Промышленная теплотехника. 2018. Т.40,№3, с. 20 – 25.
124. Халатов А.А., Авраменко А.А., Шевчук И.В. Теплообмен и гидродинамика в полях центробежных массовых сил. Том 1. Криволинейные потоки. К:Институт технической теплофизики НАН Украины, 2000. 290с.
125. Avramenko A.A., Kovetska Y.Y., Shevchuk I.V., Tyrinov A.I., Shevchuk V.I. Mixed convection in vertical flat and circular porous microchannels. Transport in Porous Media. 2018. Vol.124, №3. С. 919 – 941.
126. Tao L.N. On combined free and forced convection in channels. J. Heat Transfer. 1960. V. 82, I.3. P. 233 – 238.
127. Tao L.N. Heat transfer of combined free and forced convection in circular and sector tubes. Appl. Sci. Res. 1960. V.9. P. 357 – 368.
128. Avramenko A.A., Kovetska Y.Y., Shevchuk I.V., Tyrinov A.I., Shevchuk V.I. Heat transfer in a porous microchannels with second order slipping boundary conditions. Transport in Porous Media. 2019. V. 129. P. 673 – 699.