

Національна академія наук України
Інститут технічної теплофізики

Національна академія наук України
Інститут технічної теплофізики

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

Кравчук Олександр Вікторович

УДК 536.2, 536.7, 532.5

ДИСЕРТАЦІЯ

**Тепломасообмін та гідродинаміка однорідних та нано-рідин
в мікроканалах різної конфігурації**

05.14.06 - технічна теплофізика та промислова теплоенергетика

144 – Теплоенергетика

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

_____ О.В. Кравчук

Науковий керівник – Авраменко Андрій Олександрович, доктор технічних
наук, професор, член кореспондент НАН України

Київ-2019

АНОТАЦІЯ

Кравчук О.В. Тепломасообмін та гідродинаміка однорідних та нано-рідин в мікроканалах різної конфігурації - на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 05.14.06 – технічна теплофізика та промислова теплоенергетика. – Інститут технічної теплофізики Національна академія наук України. Київ, 2019.

Дисертація присвячена дослідженню мікропроцесів тепломасообміну та гідродинаміки однорідних та нано-рідин в мікроканалах різної конфігурації. В роботі описано розроблений нами стохастичний метод дослідження теплообміну в мікроканалі та межовому шарі при наявності наночасток на базі методу Монте-Карло. Проведено комп'ютерне дослідження теплообміну нанорідини в пласкому мікроканалі та в межовому шарі. Розрахунки методом Монте-Карло показали, що зі збільшенням поздовжньої координати вирівнюється профіль температури і концентрації. При збільшенні об'ємної долі наночастинок на вході каналу спостерігається лінійний ріст, але нелінійний ріст спостерігається зі збільшенням теплопровідності нанорідин. І нелінійне падіння спостерігається зі збільшенням числа Прандтля, оскільки збільшується в'язкість. Основний результат, який було отримано за допомогою методу Монте-Карло, свідчить про те, що додавання незначної кількості наночастинок в рідину призводить до збільшення теплообміну (при об'ємній частці наночасток 0,05 тепловіддача збільшується на 10%). Аналогічні ефекти спостерігаються як для плаского мікроканалу так и для межового шару.

Досліджено гідродинаміку та теплообмін при змішаній конвекції в вертикальному пласкому і циліндричному мікроканалах за допомогою методу ґрат Больцмана, а також проведено порівняння з аналітичними розрахунками. Зміна значень числа Релея приводить до зміни характеристик потоку в центральній частині каналу, зміна значень числа Кнудсена в першу чергу впливає на зміни характеристик в пристіночній області. При великих значеннях Прандтля висока швидкість потоку. При таких параметрах зникає стрибок

температури, і ефект проковзування не працює, що приводить до збільшення значення числа Нуссельта.

Проведено комп'ютерні експерименти з дослідження відцентрової нестійкості нанорідин з радіальною температурою та неоднорідністю концентрації. Досліджено турбулентний нестисливий потік в плоскому мікроканалі, що обертається. Збільшення сили Коріоліса призводить до появи зворотних потоків, які призводять до появи нестійкості. Зі збільшенням кутової швидкості обертання спостерігається зростання гідравлічного опору, але чим більше значення Кнудсена тим ріст гідравлічного опору зменшується через ефект проковзування. Результати роботи можна застосовувати для вибору режиму роботи різних мікроприладів, наприклад: датчиків, двигунів, насосів, турбін, каналів та клапанів.

Ключові слова: однорідна рідина, нанорідина, стохастичні методи моделювання, метод Монте-Карло, метод ґрат Больцмана, ренормалізаційно-груповий аналіз, тепломасообмін та гідродинаміка.

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації:

1. Авраменко, А. О., Тирінов, А. І., Дмитренко, Н. П., & Кравчук, О. В. (2016). Застосування методу ґраток Больцмана до аналізу течії нанорідини в каналі між коаксіальними циліндрами. Промышленная теплотехника, 38(3), с. 3-9. doi: <https://doi.org/10.31472/ihe.3.2016.01> [фахове видання]. (Автором апробовано метод ґраток Больцмана до аналізу течії нанорідини в каналі між коаксіальними циліндрами).

2. Авраменко, А. А., Ковецкая, М. М., Ковецкая, Ю. Ю., Кравчук, А. В., & Олейник, Л. В. (2016). Теплообмен при течении воды сверхкритического давления в тепловыделяющей сборке в нестационарных режимах. Промышленная теплотехника, 38(3), с. 59-68. doi: <https://doi.org/10.31472/ihe.5.2016.06> [фахове видання]. (Автором взято участь в чисельному моделюванні теплообміну при плинні води надкритичного тиску в семистрижневій тепловиділяючій збірці).

3. Авраменко, А. О., Тирінов, А. І., Дмитренко, Н. П., & Кравчук, О. В. (2016). Динаміка розгінної течії в мікроциліндрі, що починає раптово обертатися. Промышленная теплотехника, 38(6), с. 14-20. doi: <https://doi.org/10.31472/ihe.6.2016.02> [фахове видання]. (Автором взято участь

в теоретичному дослідженні розгінної течії нестисливої рідини з раптовим початком обертання мікроциліндра).

4. Кравчук, А. В. (2016). Монте–Карло моделирование теплообмена наножидкости в канале. Промышленная теплотехника, 38(6), с 21-29. doi: <https://doi.org/10.31472/ihe.6.2016.03> [фахове видання].

5. Авраменко, А. О., Тирінов, А. І., Дмитренко, Н. П., & Кравчук, О. В. (2016). Застосування методу ґраток Больцмана до аналізу течії нанорідини в каналі між коаксіальними циліндрами. Промышленная теплотехника, 38(3), с 3-9. doi: <https://doi.org/10.31472/ihe.3.2016.01> [фахове видання]. *(Автором взято участь в дослідженні потоку Тейлора-Куетта нанорідин в криволінійному каналі).*

6. Avramenko, A. A., Tyrinov, A. I., Shevchuk, I. V., Dmitrenko, N. P., Kravchuk, A. V., & Shevchuk, V. I. (2017). Mixed convection in a vertical flat microchannel. International Journal of Heat and Mass Transfer, 106, 1164-1173 [міжнародні наукометричні бази: Scopus]. *(Автором взято участь в чисельному моделюванні змішаної конвекції в вертикальному плоскому мікроканалі).*

7. Avramenko, A. A., Tyrinov, A. I., Shevchuk, I. V., Dmitrenko, N. P., Kravchuk, A. V., & Shevchuk, V. I. (2017). Mixed convection in a vertical circular microchannel. International Journal of Thermal Sciences, 121, 1-12 [міжнародні наукометричні бази: Scopus]. *(Автором взято участь в чисельному моделюванні змішаної конвекції в вертикальному циліндричному мікроканалі).*

8. Кравчук, А. В., & Авраменко, А. А. (2017). Применение метода Монте-Карло к решению задачи теплообмена в наножидкостях. Инженерно-физический журнал, 90(5), 1167-1174 [фахове видання]. *(Автором запропоновано та апробовано методу дослідження теплообміну в нанорідинах).*

9. Kravchuk, A. V., & Avramenko, A. A. (2017). Application of the Monte Carlo Method to the Solution of Heat Transfer Problem in Nanofluids. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 90(5), 1107-1114 [міжнародні наукометричні бази: Scopus]. *(Автором запропоновано та апробовано методу дослідження теплообміну в нанорідинах).*

10. Avramenko, A. A., Shevchuk, I. V., Kravchuk, A. V., Tyrinov, A. I., & Shevchuk, V. I. (2018). Application of renormalization group analysis to two-phase turbulent flows with solid dust particles. Journal of Mathematical Physics, 59(7), 073101 [міжнародні наукометричні бази: Web of Science]. *(Автором взято участь в аналітичних розрахунках).*

11. Avramenko, A. A., Dmitrenko, N. P., Kravchuk, A. V., Kovetskaya, Y. Y., & Tyrinov, A. I. (2018). Hydrodynamics of a Nonstationary Flow in a Microcylinder Beginning Sudden Rotation. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 91(6), 1452-1461 [міжнародні наукометричні бази: Scopus]. *(Автором взято участь в теоретичному дослідженні прискорення потоку рідини в мікроциліндрі, що починає раптово обертатися).*

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

12. Кравчук А.В. (2017) Монте–Карло моделирование теплообмена наножидкости в канале. Тези доповідей X міжнародної конференція «Проблеми теплофізики та теплоенергетики». (с. 53). Київ, 23 – 26 травня.

13. Кравчук А.В. (2017) Монте–Карло моделирование теплообмена наножидкости в канале. Тези доповідей міжнародної науково-практична конференція «Сучасні проблеми фізико-математичної освіти і науки». (с 256). Київ, 25 – 26 травня.

Наукові праці, які додатково відображають наукові результати дисертації:

14. Авраменко, А. А., Ковецкая, М. М., Кравчук, А. В., & Ковецкая, Ю. Ю. (2016). Перспективные исследования инновационных технологий ядерных энергетических установок. Промышленная теплотехника, 38(4), с. 47-62.

15. Авраменко, А. А., Тыринов, А. И., Дмитренко, Н. П., & Кравчук, А. В. (2016). Влияние ионов примеси на количество водородных связей. Промышленная теплотехника, 38(2), с. 20-25.

16. Авраменко, А. А., Ковецкая, М. М., Кравчук, А. В., & Ковецкая, Ю. Ю. (2016). Теплофизические исследования для оценки безопасности перспективных ядерных энергетических установок. Ядерна та радіаційна безпека, № 2, с. 14-19.

17. Ковецкая М. М., Кондратьева Е. А., Ковецкая Ю. Ю., Кравчук А. В., Скицько А. И., Сорокина Т. В. (2016). Режимы ухудшенного теплообмена при течении воды сверхкритического давления в каналах с пучками стержней. *Ядерна енергетика та довкілля*, с. 201626.

ANNOTATION

Kravchuk O.V. Heat-mass transfer and hydrodynamics of homogeneous and nano-fluids in microchannels of various configurations - On the rights of the manuscript.

Dissertation for candidate of technical sciences scientific degree, specialty 05.14.06 – Technical thermal physics and industrial heat power engineering (144 – Power engineering). Institute of Engineering Thermophysics of the National Academy of Sciences of Ukraine. Kiev. 2019.

The dissertation is devoted to the research of microprocesses of heat and mass transfer and hydrodynamics of homogeneous liquids and nanofluids in channels of different geometry. In this paper, we describe the stochastic method of studying the heat transfer in the microchannel and the boundary layer in the presence of nanoparticles based on the Monte Carlo method. Computer-aided research of heat transfer of nanofluids in a planar microchannel and in a boundary layer was carried

out. Monte Carlo calculations have shown that with the increase of the longitudinal coordinate, the profile of temperature and concentration is aligned. When increasing the volume fraction of nanoparticles at the channel entrance, linear growth is observed, but nonlinear growth is observed with an increase in the thermal conductivity of nanofluids. And a nonlinear drop is observed with the increase in the Prandtl number, as the viscosity increases. The main result obtained with the Monte Carlo method is that the addition of a small amount of nanoparticles to the fluid leads to an increase in heat transfer (with 0.05 volume fraction of nanoparticles heat transfer is increased by 10%). Similar effects are observed for both the flat microchannel and the boundary layer.

Hydrodynamics and heat exchange under mixed convection in vertical planar and cylindrical microchannels using Lattice Boltzmann method have been investigated, as well as a comparison with analytical calculations. Changing the values of the Rayleigh number leads to a change in the characteristics of the flow in the central part of the channel, the change in the values of the Knudsen number primarily affects the changes in characteristics in the wall area. At high Prandtl values, high flow rate. With such parameters, the temperature jump disappears, and the slip effect does not work, which results in an increase in the value of the Nusselt number.

Computer experiments were conducted to investigate the centrifugal instability of nanofluids with radial temperature and heterogeneity of concentration. The turbulent incompressible flow in a planar rotating microchannel is investigated. Increasing the Coriolis force leads to the appearance of reverse flows that lead to instability. With an increase in the angular speed of rotation, the growth of hydraulic resistance is observed, but the greater the value of Knudsen, the growth of hydraulic resistance decreases due to the effect of slipping. The results of the work can be used to select the mode of operation of various micro devices, such as: sensors, motors, pumps, turbines, ducts and valves.

Key words: homogeneous fluid, nanofluids, stochastic modeling methods, Monte Carlo method, Boltzmann lattice method, renormalization-group analysis, heat transfer and hydrodynamics.

LIST OF PUBLICATIONS

Scientific papers, in which the main scientific results of the thesis are published:

1. Avramenko, A. O., Tyrinov, A. I., Dmytrenko, N. P., & Kravchuk, O. V. (2016). Zastosuvannia metodu hratok Boltsmana do analizu tekhii nanoridyny v kanali mizh koaksialnymy tsylindramy. *Промышленнаиа teplotekhnika*, 38(3), P. 3-9. doi: <https://doi.org/10.31472/ihe.3.2016.01> [Scientific professional edition of Ukraine]. (The author approved the Boltzmann lattice method for the analysis of nanofluid flow in the channel between coaxial cylinders).
2. Avramenko, A. A., Kovetskaia, M. M., Kovetskaia, Yu. Yu., Kravchuk, A. V., & Oleinyk, L. V. (2016). Teploobmen pry techenyy vodu sverkhkrytycheskoho davleniia v teplovыdeliaiushchei sborke v nestatsyonarnыkh rezhymakh. *Промышленнаиа teplotekhnika*, 38(3), P. 59-68. doi: <https://doi.org/10.31472/ihe.5.2016.06> [Scientific professional edition of Ukraine]. (The author participated in the numerical simulation of heat exchange).
3. Avramenko, A. O., Tyrinov, A. I., Dmytrenko, N. P., & Kravchuk, O. V. (2016). Dynamika rozghinnoi tekhii v mikrotsylindri, shcho pochynaie raptovo obertatysia. *Промышленнаиа teplotekhnika*, 38(6), P. 14-20. doi: <https://doi.org/10.31472/ihe.6.2016.02> [Scientific professional edition of Ukraine]. (The author participated in the theoretical study of the accelerating flow of incompressible fluid with the sudden onset of rotation of the micro cylinder).
4. Kravchuk, A. V. (2016). Monte–Karlo modelyrovanye teploobmena nanozhydkosty v kanale. *Промышленнаиа teplotekhnika*, 38(6), P. 21-29. doi: <https://doi.org/10.31472/ihe.6.2016.03> [Scientific professional edition of Ukraine].
5. Avramenko, A. O., Tyrinov, A. I., Dmytrenko, N. P., & Kravchuk, O. V. (2016). Zastosuvannia metodu gratok Boltsmana do analizu tekhii nanoridyny v kanali mizh koaksialnymy tsylindramy. *Промышленнаиа teplotekhnika*, 38(3), P. 3-9.

doi: <https://doi.org/10.31472/ihe.3.2016.01> [Scientific professional edition of Ukraine]. (The author participated in the study of Taylor–Couette nanorodin flow in a curved channel).

6. Avramenko, A. A., Tyrinov, A. I., Shevchuk, I. V., Dmitrenko, N. P., Kravchuk, A. V., & Shevchuk, V. I. (2017). Mixed convection in a vertical flat microchannel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 106, 1164-1173 [Scopus]. (The author participated in numerical simulation of mixed convection in a vertical flat microchannel).

7. Avramenko, A. A., Tyrinov, A. I., Shevchuk, I. V., Dmitrenko, N. P., Kravchuk, A. V., & Shevchuk, V. I. (2017). Mixed convection in a vertical circular microchannel. *International Journal of Thermal Sciences*, 121, 1-12 [Scopus]. (The author participated in numerical simulation of mixed convection in a vertical cylindrical microchannel).

8. Kravchuk, A. V., & Avramenko, A. A. (2017). Prymenenye metoda Monte-Karlo k resheniyu zadachy teploobmena v nanozhydkostiakh. *Ynzhenerno-fyzycheskyi zhurnal*, 90(5), 1167-1174 [Scientific professional edition of Ukraine]. (The author proposed and tested the technique for studying heat transfer in nanofluids).

9. Kravchuk, A. V., & Avramenko, A. A. (2017). Application of the Monte Carlo Method to the Solution of Heat Transfer Problem in Nanofluids. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 90(5), 1107-1114 [Scopus]. (The author proposed and tested the technique for studying heat transfer in nanofluids).

10. Avramenko, A. A., Shevchuk, I. V., Kravchuk, A. V., Tyrinov, A. I., & Shevchuk, V. I. (2018). Application of renormalization group analysis to two-phase turbulent flows with solid dust particles. *Journal of Mathematical Physics*, 59(7), 073101 [Web of Science]. (The author participated in analytical calculations).

11. Avramenko, A. A., Dmitrenko, N. P., Kravchuk, A. B., Kovetskaya, Y. Y., & Tyrinov, A. I. (2018). Hydrodynamics of a Nonstationary Flow in a Microcylinder Beginning Sudden Rotation. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*,

91(6), 1452-1461 [Scopus]. (The author participated in the theoretical study of the acceleration of fluid flow in a micro cylinder, which begins to suddenly rotate).

Scientific works confirming the approbation of the materials of the thesis:

12. Kravchuk A.V. (2017) Monte–Karlo modelyrovanye teploobmena nanozhydkosty v kanale. Tezy dopovidej X mizhnarodnoyi konferenciya «Problemy teplofizyky ta teploenergetyky». (P. 53). Kyiv, 23 – 26 travnya.

13. Kravchuk A.V. (2017) Monte–Karlo modelyrovanye teploobmena nanozhydkosty v kanale. Tezy dopovidej mizhnarodnoyi naukovo-praktychna konferenciya «Suchasni problemy fizyko-matematychnoyi osvity i nauky». (P 256). Kyiv, 25 – 26 travnya.

Scientific works, which additionally represent the scientific results of the thesis:

14. Avramenko, A. A., Kovetskaia, M. M., Kravchuk, A. V., & Kovetskaia, Yu. Yu. (2016). Perspektivnye yssledovaniya ynnovatsyonnykh tekhnolohyi yadernykh enerhetycheskykh ustanovok. Promyshlennaia teplotekhnika, 38(4), P. 47-62.

15. Avramenko, A. A., Тыгунов, А. Y., Dmytrenko, N. P., & Kravchuk, A. V. (2016). Vliyanye yonov pryemesy na kolychestvo vodorodnykh sviazei. Promyshlennaia teplotekhnika, 38(2), P. 20-25.

16. Avramenko, A. A., Kovetskaia, M. M., Kravchuk, A. V., & Kovetskaia, Yu. Yu. (2016). Teplofizycheskye yssledovaniya dlia otsenky bezopasnosti perspektivnykh yadernykh enerhetycheskykh ustanovok. Yaderna ta radiatsiina bezpeka, № 2, P. 14-19.

17. Kovetskaia M. M., Kondrateva E. A., Kovetskaia Yu. Yu., Kravchuk A. V., Skytsko A. Y., Sorokyna T. V. (2016). Rezhymy ukhudshennoho teploobmena pry techenyy vody sverkhkrytycheskoho davleniia v kanalakh s puchkamy sterzhnei. Yaderna enerhetyka ta dovkilia, P. 201626.

ЗМІСТ

ЗМІСТ	
УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ.....	12
ВСТУП.....	15
РОЗДІЛ 1 СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕНЬ ТЕПЛООБМІМУ ТА ГІДРОДИНАМІКИ ОДНОРІДНИХ ТА НАНО-РІДИН.....	21
1.1. Класифікація мікро і наносистем в теплотехнологіях.....	21
1.2. Метод Монте-Карло для гідродинаміки та теплообміну.....	24
1.3. Моделювання гідродинаміки та теплообміну на основі рівнянь Больцмана.....	27
1.4. Ренормалізаційно-груповий аналіз.....	32
1.5. Мета й задачі дослідження.....	37
РОЗДІЛ 2 ТЕОРЕТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ.....	39
2.1. Узагальнююча математична модель тепломасообміну та гідродинаміки нанорідин.....	39
2.2. Метод Монте–Карло.....	44
2.3. Метод ґрат Больцмана.....	52
2.4. Метод збурень.....	64
2.5. Висновки до розділу 2.....	69
РОЗДІЛ 3 МЕТОД ГРАТ БОЛЬЦМАНА	71
3.1. Змішана конвекція в вертикальному пласкому мікроканалі.....	71
3.2. Змішана конвекція в вертикальному циліндричному мікроканалі.....	91
3.3. Центробіжна нестійкість нанорідин з радіальною температурою та неоднорідністю концентрації.....	114
3.4. Турбулентний нестисливий потік в пласкому мікроканалі, що обертається.....	126
3.5. Висновки до розділу 3.....	144
РОЗДІЛ 4 МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООБМІНУ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО.....	147
4.1. Теплообмін однорідної рідини в пласкому мікроканалі.....	147

4.2. Монте-Карло моделювання теплообміну нанорідини в плоскому мікроканалі.....	150
4.3. Теплообмін нанорідини в граничному шарі.....	155
4.4. Теплообмін нанорідини в граничному шарі з турбулентною течією...	159
4.5. Висновки до розділу 4.....	166
ВИСНОВКИ.....	168
СПИСОК ЛІТЕРАТУРНИХ ДЖЕРЕЛ.....	171

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

c – питома теплоємність;

D – безрозмірний коефіцієнт дифузії;

D_B, D_T – броунівський коефіцієнт дифузії і коефіцієнт термодифузії;

f – функція розподілу;

g – кількість кроків, зроблені часткою при одному блуканні;

G – Архімедова сила;

H – ширина каналу;

h – ентальпія;

$K(\varphi)$ – відносний коефіцієнт теплопровідності;

k – теплопровідність;

\bar{k} – безрозмірна теплопровідність;

Kn – число Кнудсена;

L – довжина вільного пробігу молекул;

Le – число Льюїса;

M – відносна щільність;

N – градієнт температури;

Nu – число Нуссельта;

\bar{Nu} – відносне число Нуссельта;

p – тиск;

Pe – число Пекле;

Pr – число Прандтля;

r – радіальна координата;

R – радіус;

Re – число Рейнольдса;

$R(\varphi)$ – відносна густина;

$RC(\varphi)$ – добуток відносної щільності на теплопровідність;

St – число Шмідта;

t – час;

Ta – число Тейлора;
 T – температура;
 U_m – швидкість на осі каналу;
 \bar{u} – безрозмірна швидкість вздовж осі x ;
 u, v, w – компоненти швидкості;
 \mathbf{v} – вектор швидкості;
 x, y, z – координати;
 \bar{x} і \bar{y} – безрозмірні координати уздовж осі x і y відповідно;
 η і ξ – безрозмірні координати в межовому шарі;
 α – коефіцієнт тепловіддачі;
 τ – час релаксації;
 $\nabla \mathbf{v}$ – тензорний градієнт швидкості;
 $(\nabla \mathbf{v})^T$ – спряжений тензорний градієнт швидкості;
 λ – теплопровідність;
 δ – одиничний тензор;
 θ – безрозмірна температура;
 μ – динамічна в'язкість;
 γ – безрозмірне хвильове число;
 ρ – густина;
 $\bar{\rho c}$ – безрозмірний добуток щільності на питому теплоємність;
 ϕ – об'ємна частка наночастинок;
 Ω – кутова швидкість.

Індекси:

0 і f – однорідна рідина;
 00 – значення для однорідної рідини при відсутності ефектів проковзування;
 2 – значення на зовнішній стінці;
 e – рівноважний розподіл;
 cr – критичне значення;
 l – на вході в канал;

p – параметр частинок;

w – параметр поблизу стінок;

x^+, x^-, y^+, y^- – напрямки переходу, вправо, вліво, вгору і вниз відповідно;

Δn – параметр на відстані Δn ;

ВСТУП

Актуальність теми. За останні декілька десятиліть спостерігається значне зменшення геометричних розмірів чутливих і виконавчих елементів з метою створення теплофізичних мікроприладів з раніше недосяжними характеристиками щодо чутливості, швидкодії та стабільності роботи. Такі маленькі пристрої зазвичай мають характерний розмір від 1 мм до 1 мікрон, і можуть бути складовими частинами датчиків, двигунів, насосів, турбін, каналів та клапанів. Мікропристрої часто застосовуються для масового, імпульсного та енергетичного транспортування.

Перевага мікроканалів пояснюється їх високим значенням відношення площі поверхні до об'єму і їх невеликим об'ємом. Велике значення відношення площі поверхні до об'єму збільшує швидкість передачі тепла і маси, що робить мікропристрої відмінними інструментами. Вивчення процесів теплообміну в мікроприладах обумовлена тим, що при переході до мікро- і нанорозмірів має місце надвисока щільність тепловиділення і виникає необхідність відведення тепла протягом малих проміжків часу в неоднорідному середовищі.

Розвиток МЕМС значно прискорився протягом 90-х років, оскільки в даній області вдалось скористатися перевагами нововведень, створених під час революції інтегральних схем 1960-1980-х років з точки зору процесів, обладнання та матеріалів. В 90-х роках мікроприлади широко застосовуються в медицині, фармакології, біології, теплоенергетиці, приладобудуванні, каталізі, тощо. В цьому столітті вже проявився активний інтерес і до нанотечій. Також досить широко використовуються в різних галузях промисловості нанорідини.

Експериментальні дослідження тепломасообміну в мікро- і наноканалах ускладнюються їх надзвичайно малими розмірами. Традиційні вимірювальні пристрої доволі дорогі, окрім того вони вносять сильні збурення, порівнянні з вимірюваними величинами. Експериментально вдається виміряти лише

інтегральні властивості течії: середні значення температур, витрату рідини при заданому градієнті тиску, профіль швидкості, падіння тиску і т. п.

Потік рідини в малих пристроях відрізняється від макроскопічних машин. Для того щоб розуміти процеси, які відбуваються в мікроканалах, необхідно мати розуміння структури потоку і його механізми. У зв'язку з цим важливе місце при вивченні тепломасообміну в мікро- нанопристроях та нанорідинах відіграє математичне моделювання. Роботу каналів МЕМС, повітропроводів, сопел, клапанів, турбомашин не завжди можна прогнозувати за допомогою звичайних моделей течії, таких як рівняння Нав'є-Стокса з граничними умовами без проковзування на інтерфейсі рідинна-тверде тіло, яке зазвичай успішно застосовується для пристроїв з більшим розміром потоку. Рівняння Нав'є-Стокса працює лише для певного діапазону чисел Кнудсена. Для таких характерних розмірів число Кнудсена Kn змінюється в межах $10^{-2} \leq Kn \leq 10^2$. У цьому діапазоні чисел Кнудсена течія вже не описується рівняннями гідродинаміки та тепломасообміну суцільних середовищ. В випадках, коли $Kn > 10^{-3}$ з'являються нерівноважні ефекти і слід шукати альтернативні моделі. До них відносяться молекулярна динаміка, метод ґрат Больцмана, пряме моделювання Монте-Карло та інші детерміновані/імовірнісні молекулярні моделі.

Враховуючи все вищезгадане, **мету даної роботи можна визначити наступним чином:** дослідження тепломасообміну та гідродинаміки в мікроканалах різноманітної геометрії з потоком однорідної рідини та нанорідин. Для досягнення вказаної мети були поставлені та вирішені наступні **завдання:**

- проаналізувати сучасний стан аналітичних і чисельних методів аналізу тепломасообміну мікромасштабних теплофізичних систем та визначити необхідність розробки додаткових методів;

- розробити стохастичний метод дослідження теплообміну в мікроканалі та межовому шарі при наявності наночастинок на базі методу Монте-Карло;
- провести комп'ютерне дослідження теплообміну нанорідини в плоскому мікроканалі та в межовому шарі;
- дослідити гідродинамічні та теплообмінні процеси при змішаній конвекції в вертикальному плоскому і циліндричному мікроканалах;
- провести комп'ютерний експеримент з дослідження відцентрової нестійкості нанорідин з радіальною температурою та неоднорідністю концентрації;
- дослідити турбулентний нестисливий потік в плоскому мікроканалі, що обертається.

Об'єкт дослідження – процеси теплообміну та гідродинаміки в мікроканалах з однорідною рідиною і нанорідиною.

Предмет дослідження – методи та засоби дослідження теплообміну та гідродинаміки в мікроканалах з однорідною рідиною і нанорідиною.

Методи дослідження. Методами математичного аналізу та стохастичним методом моделювання, розробленого на базі методу Монте-Карло, проведено дослідження теплообміну в плоскому мікроканалі та межовому шарі. Описаний нами алгоритм дослідження теплообміну застосовувався як для однорідної рідини, так и нанорідин. Перевагою даного алгоритму є швидкодія, завдяки можливості проводити дослідження в локальній області. Отримано значення відносного числа Нуссельта при різних параметрах потоку, проведено аналіз та порівняння результатів з роботами інших авторів. За допомогою методу ґрат Больцмана проведено дослідження змішаної конвекція в вертикальному плоскому та циліндричному мікроканалі, центробіжної нестійкості нанорідин з радіальною температурою та неоднорідністю концентрації, турбулентного нестисливого потоку в плоскому мікроканалі, що обертається. Проведено аналіз отриманих результатів, також показано хорошу узгодженість між аналітичним

розв'язком та результатами, отриманими за допомогою методу ґрат Больцмана

Наукова новизна одержаних результатів:

1. Вперше запропоновано алгоритм дослідження теплообміну однорідної рідини та нанорідин, який базується на методі Монте-Карло.

2. На основі запропонованого методу проведено комп'ютерні експерименти з дослідження теплообміну в плоскому мікроканалі та межовому шарі при різних параметрах потоку. Проведено опрацювання, аналіз результатів моделювання та узагальнення отриманих результатів.

3. Розвинуто метод ґраток Больцмана для проведення дослідження змішаної конвекції в вертикальному та циліндричному плоскому мікроканалі з урахуванням впливу наночасток, що дало можливість отримати профілі швидкостей, температур і значення відносного числа Нуссельта.

4. Вперше досліджено відцентрова нестійкість в зазорі течії нанорідини в криволінійному каналі, утвореному двома концентричними циліндричними поверхнями.

5. Вперше проведено моделювання повністю розвинутого турбулентного потоку в мікроканалі, що обертається, та проведена детальна фізична інтерпретація структури потоку.

Особистий внесок здобувача. Особистий внесок дисертанта полягає у аналізі сучасного стану проблеми, безпосередній участі у розробленні алгоритму дослідження теплообміну нанорідин на основі методу Монте-Карло та проведенні комп'ютерних експериментів з дослідження теплообміну в плоскому мікроканалі та межовому шарі при різних параметрах потоку. Здобувачем проведено опрацювання, аналіз результатів моделювання та узагальнення отриманих результатів.

Апробація матеріалів дисертації. Основні положення та результати роботи представлені та обговорені на: міжнародній науково-технічній конференції «Сучасні проблеми фізико-математичної освіти і науки». Дослідження в галузі теплофізики дисперсних і полімерних матеріалів, «Монте–Карло моделювання теплообміну наножидкості в каналі», Київ, 2017р; X Міжнародна конференція «Проблеми теплофізики та теплоенергетики». Фундаментальні дослідження в теплофізиці і теплоенергетиці, «Монте–Карло моделювання теплообміну наножидкості в каналі», Київ, 2017р.

Практичне значення отриманих результатів:

1. Описані в дисертації методи можуть використовуватися для визначення характеристик теплообміну і гідродинаміки рідин та нанорідин з різними параметрами течії та різною геометрією каналу. Враховуючи результати розрахунків, які представлені в дисертації, можна підібрати такі параметри рідини, що забезпечать необхідну інтенсивність теплообміну в системах охолодження пристроїв з малими геометричними розмірами.

2. На основі описаного нами алгоритму проведено розрахунки тепло- і вологообміну в будівельних конструкціях, і отримано відповідний акт про використання результатів роботи в ТОВ «Монолітбуд-2001».

3. На основі описаного нами алгоритму проведено розрахунки тепломасообмінних та гідродинамічних процесів у мікроканалах сенсорів тиску, і отримано відповідний акт про використання результатів роботи в ДП СКТБ.

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи опубліковані у 17 наукових роботах, в тому числі, в 8 статтях спеціалізованих видань, що входять у перелік ДАК МОН України; 1 стаття в закордонних виданнях; в 6 статтях, які представлені у виданнях, включених в перелік наукометричних баз даних: (Scopus, Web of Science (Clarivate Analytics)); 2 тезах доповідей на міжнародних наукових конференціях.

Структура та обсяг роботи. Дисертаційна робота складається зі вступу, 4 розділів, висновків, списку використаних джерел зі 99 найменувань. Дисертація містить 181 сторінку, в тому числі 155 сторінок основного тексту, 58 рисунків і 1 таблицю.

РОЗДІЛ 1

СУЧАСНИЙ СТАН ПРОБЛЕМИ ДОСЛІДЖЕНЬ ТЕПЛООБМІМУ ТА ГІДРОДИНАМІКИ ОДНОРІДНИХ ТА НАНО-РІДИН

1.1 Класифікація мікро і наносистем в теплотехнологіях

Без сумніву, одним з найбільш хвилюючих технологічних досягнень протягом останнього десятиліття ХХ століття стала область мікроелектромеханічних систем (МЕМС). МЕМС складається з механічних та електричних мікропристроїв, що працюють злагоджено для вимірювань та контролю локального середовища. Не випадково, що розвиток МЕМС значно прискорився протягом 90-х років, оскільки в даній області вдалось скористатися перевагами нововведень, створених під час революції інтегральних схем 1960-1980-х років з точки зору процесів, обладнання та матеріалів. Проектування МЕМС вимагає різностороннього знання матеріалів, які використовуються для побудови пристроїв, оскільки властивості матеріалів кожного компонента можуть впливати на продуктивність пристрою [3].

Вивчення мікроелектромеханічних систем та наноелектромеханічних систем (НЕМС) привернуло значну увагу при розробці мікропристроїв, таких як мікромотори, мікродатчики, мікромеханічні гіроскопи, мікронасоси, мікроклапани, газові мікротурбіни, біологічні та хімічні прилади. Мікроканали використовуються для транспортування біологічного матеріалу, наприклад білка, ДНК, клітин і ембріонів, або для транспортування хімічних зразків. Перевага мікроканалів обумовлена їх великим значенням відношення поверхні до об'єму та їх невеликим об'ємом. Велике значення відношення площі поверхні до об'єму збільшує швидкість передачі тепла та маси, що робить мікроприлади відмінними інструментами [1].

Мікроелектромеханічні системи відносяться до пристроїв, які мають характерну довжину менше 1 мм, але більше 1 мікрона, що поєднують

електричні та механічні компоненти. Книги Ковача (1998) та Мадоу (2002) є чудовими джерелами про технології мікросхем. МЕМС на чотири порядки більші, ніж діаметр атома водню, але приблизно на чотири порядки менші, ніж традиційні техногенні артефакти. Мікропристрої можуть мати характерні довжини, меншу за діаметр людського волосся. Наноелектромеханічні системи далі підштовхують електромеханічну мініатюризацію (Роко 2001, Лемей та ін.. 2001, Федер 2004) [3].

З механічної точки зору наша здатність виготовляти пристрої мікро- і нанорозмірів має ряд проблем. Якщо ми зосередимось на пристроях, які спроектовані для рідин, в яких переважають більшість має біоаналітичне застосування, скорочення масштабів довжини робить міжфазні явища та електрокінетичні явища набагато важливішими, а також зменшує значення впливу гравітації та тиску. Вплив граничної умови без проковзування, точно передбачений для макроскопічних потоків, може виявитися неточним, коли масштаб довжини невеликий. Хоча мале значення числа Рейнольдса, характерне для більшості цих потоків, усуває проблеми нелінійності в конвективних доданках та пов'язані із цим труднощі при моделюванні турбулентних течій. Необхідно розглянути нелінійність джерела у рівнянні Пуассона-Больцмана, нелінійність зв'язку електродинаміки з потоком рідини та невизначеність у прогнозуванні електроосмотичних граничних умов [4].

Характер геометрії, масштаби довжини і матеріали, що використовуються в процесі виготовлення мікросхем, призводять до спеціалізованого набору фізичних явищ і режимів потоку, які мають власні цікаві властивості та застосування. Мікромасштабні потоки, як правило, являються ламінарними завдяки масштабам короткій довжині, але можуть мати великі числа Пекле, які приводять до низького рівня дифузії макромолекул. Ці потоки можна керувати тиском, але застосовувані електричні поля часто є більш зручними або елегантними, для керування цими системами. Навіть якщо поля не застосовується, на всіх інтерфейсах у всіх випадках існують внутрішні

електричні поля, які зазвичай керуються хімічною реакцією. Таким чином, електродинаміка, хімія та механіки рідини нерозривно переплітаються, тому електричні поля можуть створювати потоки рідини, а потік рідини може створювати електричні поля, зі ступенем взаємозв'язку, який обумовлений хімічними процесами на поверхні. Ця ступінь взаємозв'язку в потоці описується електростатичними доданками джерела у рівняннях Нав'є-Стокса або рівняннях переносу частинок. За допомогою цих сил виникають багато корисних приладів, наприклад, електрокінетичні насоси [4].

Потік рідини в малих пристроях відрізняється від потоків макроскопічних машин. Відношення поверхні до об'єму для машини з характерною довжиною в один метр - 1 м^{-1} . в той час як для пристрою МЕМС, що має розмір 1 мікрон - 10^{-6} м . Роботу пристроїв на основі МЕМС систем не завжди можна прогнозувати за допомогою звичайних моделей течії, таких як рівняння Нав'є-Стокса з граничними умовами без проковзування на інтерфейсі рідина-тверде тіло, яке зазвичай успішно застосовується для більших пристроїв [2].

Тепломасообмін та гідромеханіка для газів зазвичай моделюється шляхом включення граничних умов гідродинамічного та теплового проковзування, в'язкої дисипації, а також врахуванням ефектів стисливості в рівнянь руху неперервного середовища. Для певних діапазонів робочих параметрів також використовуються молекулярні методи, або методи, засновані на кінетичній теорії газів, що втілені в рівнянні Больцмана. а також прямі методи моделювання, такі як метод Монте-Карло.

Механіка мікрорідин є більш складною. Молекули більш щільно упаковані при нормальному тиску і температурі, а також більшими є потенціали притягування або зчеплення між молекулами рідини, та між рідкою і твердою фазами, якщо характерний розмір потоку досить малий. У випадках, коли традиційна модель неперервного середовища не забезпечує точність розрахунків, використовуються більш затратні методи молекулярної динаміки або дисипативної динаміки часток. Але ці методи потребують значно більших

обчислюваних затрат для реалістичного моделювання потоку, бо необхідно враховувати надзвичайно велику кількість молекул чи часток [5].

Потік рідини через мікроканал моделюється за допомогою континууму або молекулярного підходу, залежно від числа Кнудсена. Воно визначається як співвідношення довжини вільного пробігу молекули L до характерного розміру системи, що аналізується, h .

$$Kn = \frac{L}{h}. \quad (1.1.1)$$

1.2 Метод Монте-Карло для гідродинаміки та теплообміну

Статистичні процедури, які базуються на можливості наближених математичних розв'язків фізичних задач, мають славу історію. Відомі вчені, такі як Ейнштейн, Смолуховський, лорд Релей, Ланжевен і багато інших вивчали відношення подібного роду в перші роки двадцятого століття. Наприклад, в 1899 році лорд Релей [6] показав, що так зване випадкове блукання в одному вимірі є наближений розв'язок параболічного диференціального рівняння. У 1928 р Курант, Фрідріх і Леві [6] застосував концепцію випадкового блукання для диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу з граничними умовами Діріхле. Колмогоров [6] в 1931 році вперше ввів в моделювання деяких інтегрально-диференціальних рівнянь стохастичні процеси Марківського типу.

Прийнято використовувати статистичний підхід, наприклад, в молекулярній теорії, щоб отримати певні математичні співвідношення, що підлягають вирішенню класичними методами. Однак, метод Монте-Карло може виконувати пряме моделювання цих статистичних завдань. З іншого боку, метод Монте-Карло використовується для отримання наближеного рішення математичного рівняння, що описує фізичну задачу. Очевидно, остання точка зору є заслугою фон Неймана і Улама, які вивчали проблеми, пов'язані з

дифузією нейтронів [6]. Назва Монте-Карло виникла від відповідної роботи в Лос-Аламоської національної лабораторії; фон Нейман і Улам ввели її під час Другої світової війни в якості секретного кодового імені; оскільки місто Монте-Карло відоме своїми казино [6].

Монте-Карло, розділ експериментальної математики, являється методом прямого моделювання математичних відносин шляхом випадкових процесів. У фізиці, метод Монте-Карло використовується для вирішення різні типів задач дифузії [6]. У задачах випромінювання і провідності в більшій мірі використовується метод Монте-Карло при теплопередачі.

Метод Монте-Карло, як уже зазначалося раніше, являє собою статистичний підхід до вирішення багатократних інтегралів виду

$$I(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) = \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 w(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k) dP_1(\xi_1) dP_2(\xi_2) \dots dP_k(\xi_k) \quad (1.2.1)$$

де $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ пов'язані з випадковими величинами і, за визначенням, є відповідними функціями розподілу або функціями розподілу ймовірностей. Якщо η_k - випадкове число, тоді

$$P_k(\xi_k) = \text{Probabilit } y(\eta_k < \xi_k). \quad (1.2.2)$$

Це узагальнене рівняння приймає різні форми в задачах теплообміну. Крім того, функції розподілу можуть бути дискретними функціями, як і в класичних задачах випадкового блукання [6].

Основна критика методу Монте-Карло стосується його неефективність в можливості конкурувати з математичними задачами, коли є альтернативне рішення. Цілком зрозуміло, що це вірно для дуже багатьох проблем. Однак метод Монте-Карло є надзвичайно корисним, коли (1) не існує жодної іншої зручний метод, (2) необхідна проста процедура, щоб перевірити обгрунтованість нового методу, і (3) в деяких випадках, необхідна швидка обчислювальна процедура. Дійсно, приємно бачити, що процедура Монте-

Карло, для деяких завдань, може привести до набагато швидшого рішення, ніж, наприклад, методом кінцевих різниць [6].

Хауелл (1968) розглянув метод, який застосовується до проблем теплопередачі, з акцентом на перенос випромінювання. Хаджі-Шейх і Спарроу (1969) надали загальний огляд цього методу. Вони запропонували деякі методи для зміщення методів вибору однієї змінної для обліку залежності від декількох змінних. Хаджі-Шейх (1988) надав повний огляд літератури, що стосується методу Монте-Карло для теплопередачі, включно по дату публікації [7].

Фермер і Хоуелл (1998) спробували кількісно визначити та порівняти різні загальні стратегії, доступні для використання в програмуванні моделювання Монте-Карло, і порівняли класи проблем, які зазвичай зустрічаються [7].

Бапат, Тавларідес і Сміт (1983) описали алгоритм, на базі Монте-Карло, для моделювання масопереносу в дисперсній системі рідина-рідина. Автори представили методику моделювання для прогнозування продуктивності двофазного (рідина-рідина) корпусного реактора з неприливним потоком в якості екстрактора. В роботі змодельована динаміка взаємодій між дисперсною фазою та мікроскопічного масопереносу на границі фаз в турбулентному потоці [8].

Sokhansefata, Kasaeian і Kowsary (2014) чисельно вивчали теплообмін тривимірної повністю розвиненої турбулентної змішаної конвекції нанорідини Al_2O_3 - синтетичне масло в трубчастому колекторі з неоднорідним тепловим потоком. Досліджено також вплив концентрації частинок Al_2O_3 в синтетичному маслі на швидкість теплопередачі від абсорбційної трубки. У даному дослідженні використовувались різні об'ємні частинки наночастинок (<5% від об'єму) при робочих температурах 300 К, 400 К і 500 К. Розподіл теплового потоку на зовнішній поверхні абсорбційної трубки неоднорідний в окружному напрямку, але однорідний в осьовому напрямку. Тепловий потік по окружності

був отриманий за допомогою методу трасування шляху, на основі методу Монте-Карло. Численні результати показали, що конвективний коефіцієнт теплопередачі безпосередньо залежить від об'ємної концентрації наночастинок у рідині. Крім того, збільшення теплопередачі внаслідок наночастинок у рідині зменшується при збільшенні експлуатаційної температури поглинача [9].

Апостолопулу, Дей, Халл, Стматакіс і Стріоло (2017) застосували кінетичний підхід Монте-Карло для дослідження переносу рідини в пористих мережах. Закон Дарсі, який часто використовується для опису макроскопічного потоку рідини через пористий матеріал, вважається невдалим для наноканалів. Транспортування через неоднорідні та анізотропні системи, що характеризуються широким розподілом пор, відбувається за допомогою різних транспортних механізмів, що треба брати до уваги. Ситуація ускладнюється, коли присутні суміші рідини, що не змішуються. Для узагальнення вивчення переміщення рідини через пористу мережу автори статті розробили стохастичну кінетичну модель Монте-Карло (КМК). Було проведено моделювання транспортування рідини вздовж одновимірного пористого середовища. Результати моделювання порівнювались з результатами, які отримані шляхом аналізу дифузійного рівняння. Модель КМК була потім реалізована для кількісного визначення транспортування метану через гідратовані мікропори, в цьому випадку відтворювались результати атомної молекулярної динамічної симуляції. Модель потім використовувалася для вивчення потоку через пористу мережу, де можна було кількісно оцінити вплив довжини пори та вплив з'єднань пор [10].

1.3 Моделювання гідродинаміки та теплообміну на основі рівнянь Больцмана

У цьому підрозділі буде представлений порівняно новий метод для моделювання динаміки рідин. Цей метод отримав назву метод ґрат Больцмана

(LBM). За останні 25 років LBM перетворився на альтернативну та перспективну чисельну схему для моделювання потоків рідини [11].

Рівняння переносу (для тепла, маси, імпульсу) можна моделювати в різних масштабах. У макроскопічному масштабі використовуються диференціальні рівняння в частинних похідних (PDE), такі як рівняння Нав'є-Стокса. Аналітично подібні рівняння складно розв'язувати через нелінійність, складну геометрію та граничні умови. За допомогою чисельних схем, таких як метод скінченних різниць (FDM), метод скінченних об'ємів (FVM), метод скінченних елементів (FEM), PDE перетворюється на систему алгебраїчних рівнянь. Зазвичай ми вирішуємо ці рівняння ітераційно, доки не отримаємо задовільних результатів.

Другий підхід – моделювати маленькі частинки в мікроскопічному масштабі. Такий підхід називається молекулярна динаміка. Ключовим рівнянням є рівняння Гамільтона. З молекулярною динамікою ми повинні визначити розташування та швидкість кожної частинки. Але для моделювання задачі, яка цікава в макроскопічному масштабі, буде надто багато даних для обробки.

Метод ґрат Больцмана закриває розрив між макромасштабом та мікромасштабом. Цей метод розглядає поведінку набору частинок як поведінку одного цілого. LBM базується на мікроскопічних моделях та мезоскопічних кінетичних рівняннях. Фундаментальною ідеєю LBM є побудова спрощених кінетичних моделей, що включають основну фізику мікроскопічних процесів, так що макроскопічні усереднені властивості описуються макроскопічними рівняннями. Причина, чому спрощені кінетичні моделі можуть бути використані, полягає в тому, що макроскопічна динаміка рідини є результатом колективної поведінки багатьох мікроскопічних частинок у системі [11]. Власність набору часток представлена функцією розподілу. Причиною, чому LBM стає все більш популярним у сфері обчислювальної гідродинаміки (експоненціальне зростання кількості статей за темою LBM), є те, що LBM

обчислюється локально. Він має високу ступінь розпаралелювання, отже ідеальний для паралельних обчислень.

LBM виник з методу автоматів решітчастого газу (LGA), дискретних кінетик часток з використанням дискретної решітки і дискретного часу. LBM також можна розглядати як спеціальну кінцево-різницеву схему для кінетичного рівняння функції розподілу дискретної швидкості. Ідея використання спрощеного кінетичного рівняння з одночастинковою швидкістю для моделювання потоків рідини була використана Бродвеллом (Broadwell 1964) для дослідження ударних структур. Насправді, модель Бродвелла можна розглядати як просте одномірне гратчасте рівняння Больцмана. Повна модель дискретної швидкості частки, де дискретизується простір і час на квадратній решітці, була запропонована Харді та ін. (1976) для вивчення транспортних властивостей рідин. У оригінальній роботі по методу решіткового газового автомата для двовимірної гідродинаміки Фріш та інші (1986) визнали важливість симетрії решітки для відновлення рівняння Нав'є-Стокса; вони вперше отримали правильне рівняння Нав'є-Стокса, починаючи з автоматів решітчастого газу на гексагональній решітці [12].

Автомат решіткового газу побудований як спрощена, вигадана молекулярна динаміка, в якій простір, час і швидкість частинки є дискретними. Загалом автомат решітчастого газу складається з регулярної решітки з частками, які знаходяться у вузлах. Визначено набір булевих змінних $n_i(x,t) (i=1,\dots,M)$ що описує зайнятість частинок, де M - кількість напрямків швидкості частинки на кожному вузлі. Еволюційне рівняння LGA виглядає наступним чином

$$n_i(x+e_i,t+1) = n_i(x,t) + \Omega_i(n(x,t)), \quad (i=0,1,\dots,M) \quad (1.3.1)$$

де e_i - локальні швидкості частини. Починаючи з початкового стану, конфігурація часток на кожному кроці по часу складається з двох послідовних ітерацій, (а) потокова ітерація, в якій кожна частинка рухається до найближчого

вузла у напрямку його швидкості, і (б) ітерація зіткнень, яка відбувається, коли частинки, що знаходяться в певному вузлі, взаємодіють і змінюють свої напрямки швидкості відповідно до правил розсіювання [12].

Головна особливість LBM полягає в тому, щоб замінити змінні зайнятості частинок, n_i , (булеві змінні), у рівнянні (1.3.1) за допомогою функцій розподілу для однієї частинки (реальних змінних) $f_i = \langle n_i \rangle$ та знехтувати рухом окремих частинок та співвідношенням частинка-частинка у кінетичних рівняннях (McNamara і Zanetti 1988). де $\langle \rangle$ позначає середній ансамблі. Ця процедура усуває статистичний шум у LBM. У LBM примітивні змінні - це усереднені розподіли частинок, які є мезоскопічними змінними. Оскільки кінетична форма все ще така ж, як і в автоматах решіткового газу, переваги локальності в кінетичному підході зберігаються. Локальність має важливе значення для паралелізму [12].

Важливе спрощення LBM було зроблено Хігера та Хіменесом (1989), які лінеаризували оператор зіткнення, припустивши, що розподіл близький до стану локальної рівноваги. Видозмінений підхід до оператора зіткнень, який є лінійно стабільним, був запропонований Хігером та ін (1989). Релаксаційний термін відомий як оператор зіткнення Bhatnagar-Gross-Krook (BGK) (Bhatnagar та ін., 1954) і був незалежно запропонований декількома авторами (Qian 1990. Chen та ін., 1991). У цій гратчастій моделі BGK (LBGK) локальний рівноважний розподіл вибирається для відновлення макроскопічних рівнянь Нав'є-Стокса (Qian та ін. 1992, Chen та ін. 1992). Використання гратчастої моделі BGK робить обчислення більш ефективними і враховує гнучкість коефіцієнтів переносу [12].

Лім зі співавторами в 2002 році представили результати моделювання двомірного ізотермічного потоку в мікроканалі, який викликаний перепадом тиску, отримані за допомогою методу грат Больцмана . Дві схеми обробки границь були включені для дослідження їх впливу на все поле потоку. Автори

статті звернули особливу увагу на тиск і розподіл швидкості ковзання уздовж каналу, вони також врахували швидкість потоку маси, яка є постійною по всьому каналу, і загальну середню швидкість потоку, керовану тиском. Чисельні результати добре співпадають з результатами, отриманими аналітично та експериментально. З чого випливає, що метод ґрат Больцмана є ефективним підходом для моделювання мікропотоків [13].

Інамуро та ін. запропонували застосувати метод ґрат Больцмана для двофазних незмішуваних рідин з великою різницею щільності. Складність при обробці великої різниці щільності вирішується за допомогою методу проєкції. Метод може бути застосований для моделювання потоків двофазних рідин з співвідношенням щільності до 1000. Щоб показати життєздатність методу, автори застосовували LBM для моделювання капілярних хвиль і потоків бульбашок. В капілярних хвилях кутові частоти коливання еліпсоїдальної краплі добре узгоджуються з теоретичними розрахунками. У потоках бульбашок досліджено вплив рухливості на коалесценцію двох зростаючих бульбашок. Результати моделювання поведінки багатьох бульбашок у квадратному протоці також представлені [14].

Араш Каримипур та ін. вивчали теплопередачу в ламінарному потоці, яка відбувається за рахунок вимушеної конвекції нанорідини вода-Si в мікроканалі за допомогою методу ґрат Больцмана. Вхідний потік був нижчої температури у порівнянні зі стінками мікроканалу. Моделювання проводились для об'ємних часток наночастинок від 0.00 до 0.04 та коефіцієнті ковзання від 0.005 до 0.02. Встановлено, що прогнози на основі моделі добре узгоджуються з попередніми дослідженнями. Вплив швидкості проковзування на стінці та стрибка температури нанорідини вперше вивчались методом ґрат Больцмана. Представлено лінії потоку, ізотерми, поздовжні варіації числа Нуссельта, швидкість проковзування та стрибок температури, а також профілі швидкості та температури для різних поперечних перерізів. Результати показують, що LBM можна використовувати для моделювання вимушеної конвекції в

мікроканалах з нанорідинами. Крім того, вплив стрибка температури на швидкість передачі тепла є значним. Отримані результати також показали, що зменшення значень коефіцієнта ковзання підвищує коефіцієнт конвективної теплопередачі, а отже, і числа Нуссельта, але збільшує значення швидкості проковзування на стінці та стрибка температури [15].

Мохсен Шейхолесламі (Mohsen Sheikholeslami 2017) представив результати дослідження магнітогідродинамічного конвективного потоку нанорідини в кубічному пористому корпусі. Метод решітки Больцмана обраний як мезоскопічний підхід. Вплив броунівського руху враховувалось за допомогою моделі KKL. Представлено вплив чисел Дарсі, Гартмана, Релея та об'ємної частки Al_2O_3 . Результати представлені у формі ліній швидкості, ізокінетичної енергії, лінійних потоків, ізотерм та числа Нуссельта. Результати показують, що градієнт температури над гарячою поверхнею збільшується з підйомом числа Дарсі, а також зменшується зі збільшенням сили Лоренца. Число Нуссельта збільшується з підвищенням сил плавучості та проникності пористих середовищ. Рухливість нанорідини збільшується при збільшенні об'ємної частки наночастинок, числа Дарсі, числа Рейнольдса, в той час як рухливість нанорідини зменшується зі збільшенням числа Гартмана [16].

1.4 Ренормалізаційно-груповий аналіз

Для розрахунку процесів турбулентного перенесення теплоти, імпульсу і маси часто використовуються емпіричні моделі турбулентної в'язкості різного порядку (порядок моделі визначається кількістю додаткових диференціальних рівнянь, що замикають систему рівнянь Нав'є-Стокса і Фур'є-Кірхгофа). При цьому в залежності від характеру перебігу можуть варіюватися чисельні значення констант моделі, а також додаватися додаткові члени в рівняння [17,18]. В останні десятиліття активно розвивається ренормалізаційний аналіз турбулентності, який дозволяє отримати теоретичні значення констант моделей турбулентності і уніфікувати самі моделі для різних типів потоків.

Методи ренормалізаційної групи (ренормгрупи) були спочатку розвинені в квантовій теорії поля [19, 20]. Потім ці методи успішно використовувалися для аналізу критичних явищ при фазових переходах другого роду [21- 23]. Пізніше вони знайшли застосування і для опису розвиненої турбулентності. Однак перед тим, як безпосередньо перейти до ренормалізаційного аналізу турбулентності, розглянемо основні ідеї даного методу.

Почнемо з евристичних побудов Каданоффа (див. монографії [24, 25]). Каданофф висунув ідею, яка пояснює автомодельність (подібність) деяких термодинамічних співвідношень при масштабних перетвореннях. Ним була розглянута d -мірна решітка феромагнітного матеріалу, яка розбивається на окремі комірки. Кожна комірка містить певну кількість вузлів решітки. Кожен вузол характеризується магнітним моментом. По суті ідея Каданоффа полягає в тому, що момент комірки, в деякому сенсі, веде себе подібно моменту вузла, тобто орієнтований в якомусь напрямку. Отже, момент вузлів формує момент комірки. Далі комірки можуть бути об'єднані в більш великі блоки з відповідним моментом. Цей процес укрупнення можна продовжити (рис 1.4.1). На кожному кроці укрупнення дотримується подібність структури, тобто комірки поводяться подібно окремим вузлам, якщо розглядати ці комірки в більшому масштабі.

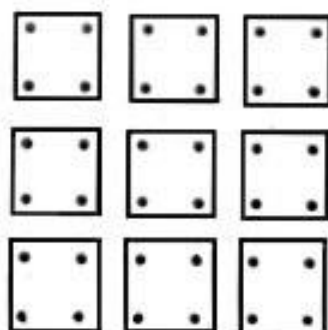


Рис. 1.4.1. Блокова структура

Описана система може бути охарактеризована гамільтоніаном (Гамільтонів підхід [26]). Для визначення цього гамільтоніана можна

використовувати метод ренормалізаційної групи. Відповідно до цього методу, спочатку визначається гамільтоніан взаємодії H_0 двох вузлів, відокремлених відстанню L . Потім знаходимо ефективний гамільтоніан H_1 блоку розміром $2L$ (коефіцієнт 2 взятий довільно). Це крок означає процес усереднення, який залишає поза розглядом в середньому ефекти масштабу L . Далі процес укрупнення в розрахунку гамільтоніана продовжується, і таким чином, на n -му кроці знаходимо гамільтоніан H_n для області розміром $2^n L$. При цьому з розгляду виключаються масштаби розміром $2^{n-1} L$ і менше.

Описана процедура дозволяє очікувати, що форма гамільтоніана комірки буде подібна моделі окремого вузла, але параметри, від яких залежить гамільтоніан, будуть інші.

Вони будуть перенормовані (ренормалізовані) з урахуванням укрупнення масштабу розгляду. Вищезгаданий процес ренормалізації може бути виражений як група повторюваних перетворень:

$$g(H_0) = H_1, \quad g(H_1) = H_2, \quad \dots, \quad g(H_{n-1}) = H_n. \quad (1.4.1)$$

На кожному кроці каскадного процесу проводиться збільшення масштабу і зміна параметрів задачі для того, щоб гамільтоніан завжди мав одну і ту ж форму в перетворених координатах. Саме така процедура веде до перенормування, а перетворення (1.4.1) визначають просту групу. Таким чином, ренормгрупу можна визначити як групу перетворень симетрії, але яка володіє рядом властивостей не властивих звичайним групам симетрії [8]. Ці властивості стануть зрозумілі з подальшого розгляду.

Якщо ітераційні перетворення ведуть до результату

$$H_n = H_{n+1}, \quad (1.4.2)$$

де $H_{n+1} = g(H_n)$, то $H_n = H_N$ є фіксованою точкою, яка відповідає критичній точці в теорії фазових переходів другого роду. З (1.4.2) випливає, що в цій точці необхідність в подальшому ітераційному масштабуванні відпадає, тобто гамільтоніан буде інваріантом при подальших масштабних перетвореннях.

Якщо стан фізичної системи уявити точкою в багатовимірному просторі, координати якого є сили взаємодії, то масштабні перетворення будуть переміщати цю точку. Таким чином, дія ренормгрупи має перемістити систему по траєкторії в відповідності до послідовністю масштабних операцій, які грають роль часу. Результуюча фіксована точка визначається розв'язком рівняння

$$g(H_N) = H_N, \quad (1.4.3)$$

тобто наступні перетворення не переміщують дану точку - вона залишається нерухомою (фіксованою). Рівняння (1.4.3) являє собою функціональне рівняння ренормалізаційної групи. На підставі цього рівняння можна отримати диференціальне рівняння ренормалізаційної групи або рівняння Гелл-Манна – Лоу [p1.п4.4, 27].

Рішення рівняння (1.4.3) не залежить від початкової взаємодії H_0 . Це обумовлено універсальністю поведінки у фіксованій (критичній) точці. У разі турбулентності це властивість означає, що ренормалізована ефективна в'язкість не буде залежати від молекулярної в'язкості, з якої починається процедура перенормування.

При великих числах Рейнольдса в режимі розвиненою турбулентності реалізується каскадний механізм Річардсона перенесення енергії по спектру хвильових чисел через послідовність взаємодій мод близьких масштабів - локальні взаємодії [28, 29]. Це означає, що взаємодіють вихори приблизно однакових масштабів, а взаємодія вихорів з істотно розрізняються масштабами реалізується за допомогою багатоступінчастої каскадної послідовності взаємодій через вихори проміжних масштабів. В даному випадку слід розрізняти динамічні ефекти взаємодії вихорів близьких масштабів і безпосередні взаємодії вихорів з істотно різними масштабами, які зводяться до кінематичних ефектів перенесення великомасштабними пульсаціями дрібномасштабних [30]. Оскільки спектр розвиненої турбулентності формується тільки за рахунок динамічних взаємодій, то виникають проблеми

опису турбулентності на основі аналізу статистичних рішень рівнянь гідродинаміки (рівнянь Нав'є-Стокса). Перша проблема полягає в тому, що міжмодова взаємодія є сильною, оскільки ефективним параметром розкладання в ряд теорії збурень виявляється число Рейнольдса, так що ряд є розбіжним. Друга проблема пов'язана з тим, що турбулізована рідина містить велику кількість мод осциляцій різних масштабів. Причому моди всіх масштабів грають істотну роль в каскадному механізмі перенесення енергії по спектру хвильових чисел, тобто в даному випадку ми стикаємося з проблемою опису багатомодовою системи при відсутності виділеного характерного масштабу.

Метод, на основі якого можна подолати зазначені труднощі - це метод ренормалізаційної групи, так як даний метод являє собою спосіб дослідження великомасштабної поведінки багатомодової системи з сильною міжмодовою взаємодією і великою протяжністю спектра характерних масштабів [22].

Згідно викладеної вище ідеології ренормалізаційного аналізу визначається усереднений вплив дрібномасштабних (високочастотних) мод на великомасштабні за допомогою ітераційного усереднення по вузькій смузі спектра хвильових чисел дрібномасштабних мод. Усереднений вплив зводиться до ренормалізації (перенормування) параметрів, що характеризують систему. В даному випадку, тобто при дослідженні турбулентності, такими параметрами є ефективна в'язкість і амплітуда ефективних випадкових сил [31].

В роботі [32] вперше була використана ренормалізаційна техніка, раніше розвинена в теорії критичних явищ, для опису турбулентності, яка виникає за рахунок статистично заданій випадковій силі. В [33] також був використано ренормгруповий підхід до дослідження турбулентності, але на основі польового формулювання. При цьому можна обчислити лише показники ступеневої поведінки (індекси скейлінга) статистичних моментів турбулентних пульсацій поля швидкості, але не амплітудні числові множники. Однак індекси скейлінга можна визначити виходячи з міркувань розмірності. В цьому плані ренормалізаційна техніка не дає нових результатів [17]. Пізніше було показано

[34], що використання методу ренормгрупи в великомасштабному діапазоні дозволяє знайти також і амплітудні числові коефіцієнти, які є універсальними константами, тобто залежать від характеристик системи в області великих хвильових чисел i , в окремому випадку, від молекулярної в'язкості. Надалі значний внесок у розвиток даного напрямку в дослідженні турбулентності внесли Яхот і Оржег [35, 36].

1.5 Мета й завдання дослідження

Огляд літератури показав, що в області дослідження теплообміну та гідродинаміки нанорідин мають місце наступні особливості:

- складність математичної моделі для опису теплообміну та гідродинаміки рідини при наявності наночастинок. Найбільш повною моделлю є системи диференціальних рівнянь Бонжорно;
- метод Монте-Карло раніше не застосовувався для дослідження теплообміну в нанорідинах;
- відсутність стохастичного методу для швидкого дослідження теплообміну нанорідин в локальній області потоку.
- слабо досліджено змішану конвекцію в вертикальному пласкому мікроканалі та вертикальному циліндричному мікроканалі за допомогою методу ґрат Больцмана ;
- за допомогою методу ґрат Больцмана недостатньо досліджена центробіжна нестійкість нанорідин з радіальною температурою та неоднорідністю концентрації, а також турбулентний нестисливий потік в пласкому мікроканалі, що обертається;
- не вивчено області застосування ренормалізаційно-груповий аналіз і метод збурень при дослідженні теплообміну в нанорідинах.

Враховуючи все вищезгадане, **мету даної роботи можна визначити наступним чином:** розвиток стохастичних методів дослідження мікропроцесів тепломасообміну та гідродинаміки в системах охолодження з використання однорідної рідини та нанорідин. Для досягнення вказаної мети були поставлені та вирішені наступні **завдання:**

- вивчення сучасного стану аналітичних і чисельних методів аналізу тепломасообміну мікромасштабних теплофізичних систем та визначення необхідності розробки додаткових методів;
- розробка стохастичного методу дослідження теплообміну в мікроканалі та межовому шарі при наявності наночастинок на базі методу Монте-Карло;
- проведення комп'ютерного дослідження теплообміну нанорідини в пласкому мікроканалі та в межовому шарі;
- дослідження гідродинаміки та теплообміну при змішаній конвекції в вертикальному пласкому і циліндричному мікроканалах;
- проведення комп'ютерного експерименту з дослідження центробіжної нестійкості нанорідин з радіальною температурою та неоднорідністю концентрації;
- дослідження турбулентного нестисливого потоку в пласкому мікроканалі, що обертається.

РОЗДІЛ 2

ТЕОРЕТИЧНІ МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ

2.1 Узагальнююча математична модель тепломасобміну та гідродинаміки нанорідин

В 2009 році Бонжорно запропонував математичну модель опису конвекційного тепло- та масопереносу в рідинах з урахуванням впливу наночастинок. Слід зазначити що в моделі Бонжорно нанорідини розглядаються як двокомпонентна суміш (базова рідина + наночастинки) з наступними припущеннями [37]:

1. потік нестисливий,
2. хімічні реакції відсутні,
3. впливом зовнішніх сил можна знехтувати,
4. суміш розріджена,
5. дисипацією енергії пов'язану з в'язкістю можна знехтувати,
6. радіаційним теплообміном можна знехтувати,
7. наночастинки і локальна базова рідина знаходяться в тепловій рівновазі.

Таким чином модель Бонжорно представляє собою систему модифікованих рівнянь Нав'є-Стокса і Фур'є-Кіргофа. Система диференціальних рівнянь в часткових похідних, що описує рух в'язкої ньютонівської рідини, це рівняння Нав'є-Стокса. Рівняння конвективного теплообміну, відоме також як рівняння Фур'є-Кіргофа, виражає розподіл температур в рухомому потоці рідини або газу.

Узагальнюючі модель Бонжорно, можемо представити систему рівнянь в наступному вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{Div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = -\operatorname{grad}(p) + \operatorname{Div} \left(\mu \left(\operatorname{Grad}(\mathbf{v}) + \operatorname{Grad}(\mathbf{v})^T - \frac{2}{3} \delta_{ij} \operatorname{div}(\mathbf{v}) \right) \right), \quad (2.1.2)$$

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} h) = \operatorname{div}(k \cdot \operatorname{grad}(T)) + \rho_p c_p \left(D_B \operatorname{grad}(\varphi) \cdot \operatorname{grad}(T) + D_T \frac{\operatorname{grad}^2(T)}{T} \right), \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial(\rho \varphi)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \varphi) = \rho \operatorname{div} \left(D_B \operatorname{grad}(\varphi) + D_T \frac{\operatorname{grad}(T)}{T} \right), \quad (2.1.4)$$

де $\operatorname{Grad}(\mathbf{v})$ - тензорний градієнт швидкості, $\operatorname{Grad}(\mathbf{v})^T$ - спряжений тензорний градієнт швидкості, δ_{ij} - одиничний тензор (тензор Кронекера), Div - тензорна дивергенція, \otimes - тензорний (діадний) добуток векторів. Для розв'язання системи (2.1.1) - (2.1.4) необхідно використовувати наступні додаткові рівняння:

$$\mu = \frac{\mu_f}{(1-\varphi)^{2.5}}, \quad D_B = \frac{k_B T}{3\pi\mu d_p}, \quad D_T = \beta \frac{\mu}{\rho} \varphi, \quad (2.1.5)$$

$$\rho = (1-\varphi)\rho_f + \varphi\rho_p, \quad \rho c = (1-\varphi)(c\rho)_f + \varphi(c\rho)_p, \quad \beta = (1-\varphi)\beta_f + \varphi\beta_p, \quad (2.1.6)$$

$$k = k_f \left(\frac{k_p + 2k_f + 2\varphi(k_p - k_f)}{k_p + 2k_f - \varphi(k_p - k_f)} \right) \quad (2.1.7)$$

Рівняння (2.1.3) вказує на те, що тепло може передаватися в нанорідині за рахунок конвекції (другий доданок в лівій частині), за рахунок теплопровідності (перший доданок в правій частині), а також за допомогою дифузії наночастинок (другий і третій доданки в правій частині рівняння). Важливо підкреслити, що h - ентальпія нанорідин, і таким чином, вже враховується тепловміст наночастинок, коли вони рівномірно рухаються з рідиною. Таким чином, останні два доданки в правій частині враховують додатковий вплив, пов'язаний з рухом наночастинок відносно рідини.

Рівняння (2.1.4) вказує на те, що наночастинки можуть переміщатися з рідиною в рівній мірі (другий член в лівій частині), але вони також мають швидкість ковзання відносно рідини (права частина рівняння), що пов'язано з броунівською дифузією і термофорезом.

Для часткових випадків вказана математична модель може бути спрощена з урахуванням нехтування тих чи інших ефектів. Зокрема математична модель

Бонжорно для плоского каналу зі стаціонарним потоком нанорідин (рис. 2.1.1) має наступний вигляд:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} = 0, \quad (2.1.8)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.1.9)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial h}{\partial x} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \rho_p c_p \left(D_B \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{D_T}{T} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \right) \right), \quad (2.1.10)$$

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} = D_B \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \frac{D_T}{T} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right). \quad (2.1.11)$$

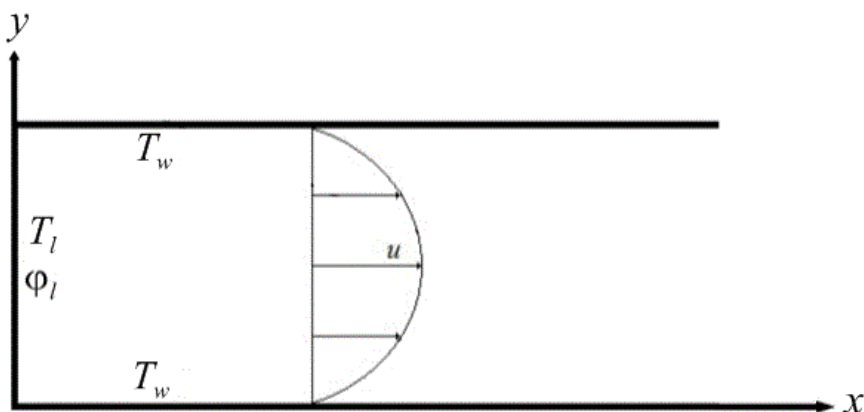


Рис. 2.1.1 Схема потоку в плоскому каналі

В роботах [38, 39] детально досліджено вплив наночастинок, які знаходяться в рідині, на гідродинаміку її течії. Було показано, що наночастинок досить слабо впливають на профіль швидкості течії рідини. Тому для плоского каналу профіль швидкості можна задати класичним параболічним розподілом:

$$u = 4U \frac{y}{H} \left(1 - \frac{y}{H} \right). \quad (2.1.12)$$

В рівняннях (2.1.8) - (2.1.11) відсутні доданки зі швидкістю течії вздовж осі Ox , оскільки вона рівна нулю. В даному випадку ми розглядаємо стаціонарний потік нанорідин, відповідно доданки з похідними по часу також рівні нулю.

Система рівнянь (2.1.8) - (2.1.11) розв'язується при наступних граничних умовах:

$$u = u_y, \quad v = 0, \quad T = T_l(h = h_l),$$

$$\varphi = \varphi_l \quad \text{при } x = 0 \quad (2.1.13)$$

$$u = v = 0, \quad T = T_w(h = h_w),$$

$$\left(D_B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_w = - \left(\frac{D_T}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w, \quad \text{при } y = 0, \quad (2.1.14)$$

Друга умова (2.1.14) означає непроникність стінки каналу. Ця умова необхідна для того, щоб частки не проникали через стінку. На стінці має виконуватися рівняння (2.1.4). Конвективний член (ліва частина) дорівнює нулю внаслідок нульових швидкостей часток на стінці, що і дає останню умову в рівнянні (2.1.14), характерне для потоку Стефана. Дана умова вперше було запропоновано в роботах [38, 39].

Математична модель Бонжорно для граничного шару на плоскій пластині (рис. 2.1.2) має вигляд:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (2.1.15)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (2.1.16)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \rho_p c_p \left(D_B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{D_T}{T} \frac{\partial T \partial T}{\partial y \partial y} \right) \quad (2.1.17)$$

$$u \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(D_B \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{D_T}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right). \quad (2.1.18)$$

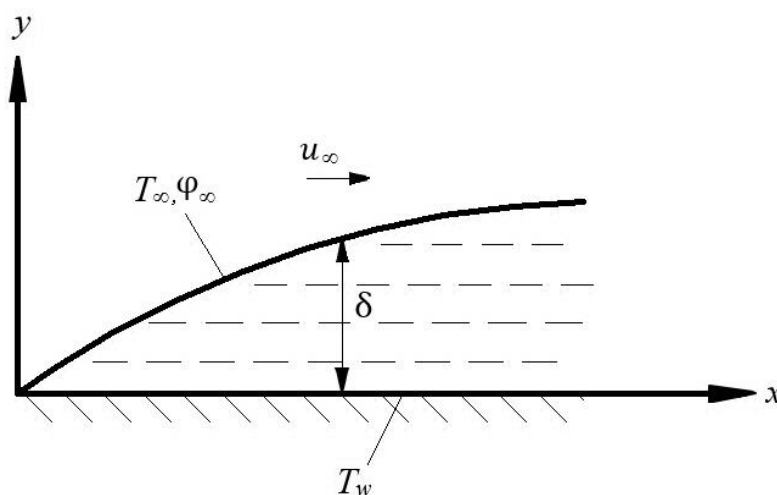


Рис. 2.1.2 Схема потоку в граничному шарі на плоскій пластині

Граничні умови для рівнянь (2.1.15) - (2.1.18) наступні:

$$u = v = 0, \quad T = T_w (h = h_w),$$

$$\left(D_B \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} = - \left(\frac{D_T}{T} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad \text{при } y = 0, \quad (2.1.19)$$

$$u = u_\infty, \quad T = T_\infty (h = h_\infty),$$

$$\varphi = \varphi_\infty \quad \text{при } y \rightarrow \infty. \quad (2.1.20)$$

Остання умова в рівнянні (2.1.19) означає непроникність стінки, за аналогією до граничної умови плоского каналу.

Для врахування впливу проковзування на стінках в [40] пропонується використовувати наступні граничні умови при моделюванні течій в діапазоні чисел Кнудсена $10^{-3} \leq \text{Kn} \leq 0,1$. Скачок поздовжньої компоненти швидкості в пристінній області для першого порядку точності вираховується за формулою:

$$u_w = C_1 \text{Kn} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_w, \quad (2.1.21)$$

а для другого визначається співвідношенням

$$u_w = C_1 \text{Kn} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)_w - C_2 \text{Kn}^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_w. \quad (2.1.22)$$

Із рівняння нерозривності гранична умова для нормальної компоненти

$$\left(\frac{\partial v}{\partial n} \right)_w = C_1 \text{Kn} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \right)_w. \quad (2.1.23)$$

Згідно [40] скачок температури в пристінній області для першого порядку точності визначається наступним чином

$$T_w = C_1 \frac{\text{Kn}}{\text{Pr}} \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_w. \quad (2.1.24)$$

У виразах (2.1.21) - (2.1.24) $\frac{\partial}{\partial n}$ – градієнт по безрозмірній нормалі до стінки. В роботі [41] пропонують такі значення коефіцієнтів в (2.1.21) -(2.1.24): $C_1 = 1,0$, $C_2 = 1,6875$, тоді яку [42], а значення коефіцієнта C_1 має зростати від 1,0 до 1,466 при зростанні числа Кнудсена.

2.2 Метод Монте–Карло

На практиці часто виникає ситуація, коли необхідно мати інформацію про фізичний процес в локальній точці. В цьому випадку дуже корисним є метод Монте-Карло. Задачі такого типу - це крайові задачі для еліптичних рівнянь (наприклад, для рівняння Лапласа) і суміжні їм задачі для рівнянь параболічного типу, які не пов'язані безпосередньо з теорією ймовірності, але до яких добре застосовується метод Монте-Карло. В роботі [43] випадкові процеси такого типу (процеси Маркова) були застосовані вперше для розв'язання задач теплопровідності, що базуються на рівняннях параболічного типу.

Метод Монте-Карло зазвичай вважається застосовувемий до вирішення завдань, описуваних лінійними диференціальними рівняннями з лінійними граничними умовами. Але в роботі [43] було показано, що цей метод може бути використаний і в задачах з нелінійними граничними умовами, тобто в так званих задачах з зовнішньої нелінійністю. Цікаво відзначити, що за допомогою методу Монте-Карло можна визначати температуру в будь-якій окремо взятої точці області без розрахунку всього поля температур, що довелося би робити при використанні звичайних матричних методів [44].

Для дослідження теплообміну в потоці нанорідин на гідродинамічно стабілізованій ділянці плоского каналу з використанням методу Монте-Карло необхідно привести систему рівнянь (2.1.8) – (2.1.11) до безрозмірного виду. Для цього вводимо безрозмірні змінні

$$\bar{x} = \frac{x}{H}, \quad \bar{y} = \frac{y}{H}, \quad \bar{u} = \frac{u}{U_m}.$$

Система рівнянь (2.1.8) – (2.1.11) в цих змінних для потоку нанорідини на гідродинамічно стабілізованій ділянці плоского каналу має вигляд

$$\text{PeRC}(\varphi) \left(\bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} \right) = K(\varphi) \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2} \right) + \frac{\bar{\rho}c}{\text{Le}} \left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} \right) + D \left(\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} \right) \right), \quad (2.2.1)$$

$$\text{Pe} \left(\bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{1}{\text{Le}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{y}^2} + D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2} \right) \right), \quad (2.2.2)$$

де

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_0 - T_w}, \quad \text{Re} = \frac{U_m h \rho_f}{\mu_f}, \quad \text{Pr} = \frac{k_f c_f}{\mu_f},$$

$$\text{Pe} = \text{Re Pr}, \quad \text{Le} = \frac{k_f}{D_B}, \quad D = \frac{T_0 - T_w}{T_0} \frac{D_T}{D_B}, \quad \bar{\rho} c = \frac{\rho_p c_p}{\rho_f c_f},$$

$$RC(\varphi) = (1 - \varphi) + \varphi \frac{\rho_p c_p}{\rho_f c_f}, \quad \bar{k} = \frac{k_p}{k_f}, \quad K(\varphi) = \frac{\bar{k} + 2 + 2\varphi(\bar{k} - 1)}{\bar{k} + 2 - \varphi(\bar{k} - 1)}.$$

В роботі [45] показано, що функцію $K(\varphi)$ можна розрахувати як константу по середній об'ємній долі наночастинок в певному перерізі каналу, тому ця функція винесена з-під похідної.

Система рівнянь (2.2.1), (2.2.1) розв'язувалась при наступних граничних умовах на стінках каналу:

$$\bar{u} = \theta = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{y}} \right)_w = - \left(D \frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} \right)_w. \quad (2.2.3)$$

Друга умова (2.2.3) при $\bar{y} = 0$ або $\bar{y} = 1$ означає непроникність стінки каналу.

Основною складовою частиною розв'язання диференціальних рівнянь методом Монте-Карло являється процедура випадкового блукання. Зазвичай процес випадкового блукання моделюється на решітці таким чином, щоб в кожен момент часу відбувається "перескок" броунівської частинки з одного вузла в другий сусідній вузол [6].

Накладемо на плоский канал квадратну сітку з розмірами вічок $\Delta \bar{x}$ і $\Delta \bar{y}$, як показано на рис. 2.2.1. Частинка, що знаходиться в точці (i, j) , може перейти в одну з точок $(i+1, j)$, $(i, j+1)$, $(i-1, j)$ або $(i, j-1)$ з відповідними ймовірностями P_{x+} , P_{y+} , P_{x-} и P_{y-} відповідно. Слід враховувати, що ймовірності не можуть бути

від'ємні і сума їх дорівнює одиниці. Генеруючи випадкове число від 0 до 1, визначаємо, до якого проміжку ймовірностей воно належить. Наприклад, при рівноймовірних переходах, якщо випадково розігране число лежить в діапазоні від 0 до 0.25, частка перейде з точки (i, j) в $(i+1, j)$. Якщо ж випадкове число знаходиться між 0.25 і 0.50, то частка перейде з (i, j) в $(i, j+1)$ і так далі. Напрямок переходу не залежить від історії руху частки [46].

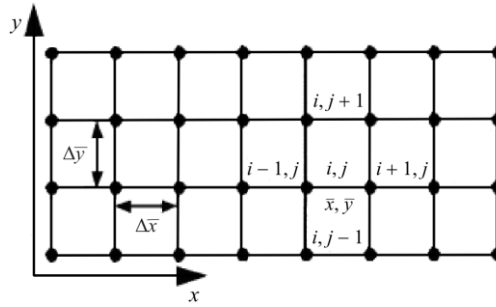


Рис. 2.2.1 Плоский канал з накладеною сіткою

Запишемо рівняння (2.2.1) в кінцевих різницях. Температура в будь-якій точці сітки виражається через температури сусідніх точок:

$$\theta(i, j) = P_{x+} \theta(i+1, j) + P_{y+} \theta(i, j+1) + P_{x-} \theta(i-1, j) + P_{y-} \theta(i, j-1) + S \quad (2.2.4)$$

де

$$P_{x+} = \frac{\text{Le} \left(K(\varphi) \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{x}} - \text{Pe} R C \bar{u} \Delta \bar{y} \right) + \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{x}} \bar{\rho} c (\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j})}{\text{Den}_\theta},$$

$$P_{y+} = \frac{\text{Le} K(\varphi) \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta \bar{y}} + \bar{\rho} c \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta \bar{y}} (\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j})}{\text{Den}_\theta},$$

$$P_{x-} = \frac{\text{Le} K(\varphi) \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{x}}}{\text{Den}_\theta}, \quad P_{y-} = \frac{\text{Le} K(\varphi) \frac{\Delta \bar{x}}{\Delta \bar{y}}}{\text{Den}_\theta},$$

$$S = \frac{D \bar{\rho} c \Delta \bar{x} \Delta \bar{y} \left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \bar{y}} \right)^2 \right)}{\text{Den}_\theta},$$

$$Den_{\theta} = 2LeK(\varphi) \left(\frac{\Delta \bar{x}}{\Delta \bar{y}} + \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{x}} \right) - PeLeRC \bar{u} \Delta \bar{y} + \\ + \rho c \left(\frac{\Delta \bar{x}}{\Delta \bar{y}} \varphi_{i,j+1} + \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{x}} \varphi_{i+1,j} - \left(\frac{\Delta \bar{x}}{\Delta \bar{y}} + \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{x}} \right) \varphi_{i,j} \right).$$

У формулі (2.2.4) останній доданок містить квадрати похідних температури по координатам. Вони розраховуються за попереднім ітераціям. Після того, як частка завершила свій перший крок, вищезгадані операції можуть бути повторені при виконанні другого кроку. Аналогічно виконується третій крок, і так далі. Оскільки вузлові точки сітки і величина кроку фіксується заздалегідь, то описаний вище процес називається фіксованим випадковим блуканням.

Розглянемо алгоритм обчислення температури в довільній внутрішній вузловій точці. Температура на границі θ_w являється заданою функцією координат. Щоб почати обчислення температури в точці (i, j) , частка приводиться в рух з цієї точки. Наявність останнього доданка у формулі (9) означає, що ця величина буде враховуватися на кожному кроці. Частка блукає по вузлах сітки від точки до точки до тих пір, поки не досягне границі, в цьому випадку границя являє собою поглинаючий екран. Після чого записується відома в цій граничній точці температура. Позначимо температуру в кінці першого блукання як $\theta_w(1)$. Потім з точки (i, j) випускається друга, третя, ..., N -а частки і записуються відповідні температури в кінцевих точках блукання: $\theta_w(2)$, $\theta_w(3)$, ..., $\theta_w(N)$. Температура внутрішньої точки визначається як сума усереднених температур граничних точок, досягнутих випадково блукаючими частинками, і середнього значення параметра S . Наприклад, при першому запуску випадково блукаючої частки з точки (i, j) вона зробить g_1 кроків. Тоді параметр $S(1)$ буде мати значення $\sum_{m=1}^{g_1} S_m$. При N -му запуску $S(N) = \sum_{m=1}^{g_N} S_m$. В результаті, формула для визначення температури приймає вигляд

$$\theta(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \theta_w(n) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^{g_n} S_m \right). \quad (2.2.5)$$

Вибір досить великої довжини кроків $\Delta\bar{x}$ і $\Delta\bar{y}$ може привести до від'ємних імовірностям. У методі Монте-Карло, від'ємні імовірності є неприйнятними, і ця умова є аналогом критерію нестійкості в методі кінцевих різниць [46]. Умова, при якій всі імовірності повинні бути невід'ємні, виконується, якщо $Den_\theta > 0$ і $Den_\varphi > 0$.

На першій ітерації алгоритму визначається температура рідини без наявності наночастинок. Далі розраховується об'ємна частка наночастинок, і на третій ітерації визначається температура нанорідини. Виразивши з кінцево-різницевого виду рівняння (2.2.2) об'ємну частку наночастинок в будь-якій точці сітки $\varphi(i, j)$ через значення об'ємних часток в сусідніх точках, отримуємо

$$\varphi(i, j) = P_{x+} \varphi(i+1, j) + P_{y+} \varphi(i, j+1) + P_{x-} \varphi(i-1, j) + P_{y-} \varphi(i, j-1) + F, \quad (2.2.6)$$

де

$$P_{x+} = \frac{\frac{\Delta\bar{y}}{\Delta\bar{x}} - \text{Pe Le } \bar{u} \bar{y}}{Den_\varphi}, \quad P_{y+} = \frac{\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta\bar{y}}}{Den_\varphi}, \quad P_{x-} = \frac{\frac{\Delta\bar{y}}{\Delta\bar{x}}}{Den_\varphi}, \quad P_{y-} = \frac{\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta\bar{y}}}{Den_\varphi},$$

$$F = \frac{D \left(\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta\bar{y}} (\theta_{i,j+1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}) + \frac{\Delta\bar{y}}{\Delta\bar{x}} (\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}) \right)}{Den_\varphi},$$

$$Den_\varphi = 2 \left(\frac{\Delta\bar{x}}{\Delta\bar{y}} + \frac{\Delta\bar{y}}{\Delta\bar{x}} \right) - \text{Pe Le } \bar{u} \Delta\bar{y}.$$

Процедура визначення об'ємної частки наночастинок відрізняється від обчислення температури тільки граничною умовою на верхній і нижній стінках каналу, при цьому на лівій границі використовується поглинаючий екран. Відповідно до рівняння (2.2.3) градієнт частки наночастинок на границі прямо

пропорційний градієнту температури. Розкладаючи об'ємну частку поблизу стінки в ряд Тейлора і утримуючи члени до другого порядку, отримуємо

$$\varphi_w = \varphi_{\Delta n} + D \frac{\partial \theta}{\partial n} \Delta n \quad (2.2.7)$$

Рівняння (2.2.7) значить з ймовірнісної точки зору, що як тільки частинка знаходиться на границі, то вона відбивається всередину каналу на відстань Δn і при цьому фіксується значення об'ємної частки наночастинок на стінці. Така границя називається відбиваючим екраном. Таким чином, об'ємна частка наночастинок в певній точці $\varphi(i, j)$ буде рівна

$$\varphi(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_w(n) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^{g_n} F_m \right) \quad (2.2.8)$$

Перш ніж перейти безпосередньо до знаходження об'ємної частки наночастинок в пласкому каналі, необхідно знати частку наночастинок в точці, розташованій на відстані Δn від границі $\varphi_{\Delta n}$. Задамо об'ємні частки наночастинок на верхній і нижній границях рівні частці наночастинок на вході в канал. Далі виконаємо процедуру обчислення об'ємних часток наночастинок $\varphi_{\Delta n}^{\text{old}}$ уздовж каналу. Заповнивши масив об'ємних часток наночастинок $\varphi_{\Delta n}^{\text{old}}$, ми перевизначаємо об'ємні частки наночастинок на верхній і нижній стінках каналу φ_w^{old} відповідно до рівняння (2.2.7). Замінивши значення φ_w на φ_w^{old} , повторюємо вище описану процедуру і знаходимо новий масив об'ємних часток $\varphi_{\Delta n}^{\text{new}}$ і φ_w^{new} . Враховуючи на значення нев'язки, можна або знову перезаписати об'ємні частки уздовж верхньої і нижньої стінок каналу і повторити обчислення $\varphi_{\Delta n}$ або зупинитися. За допомогою рівняння (2.2.9) обчислюємо величину нев'язки:

$$\varepsilon = \frac{\varphi_{\Delta n}^{\text{new}} - \varphi_{\Delta n}^{\text{old}}}{\varphi_{\Delta n}^{\text{old}}} \quad (2.2.9)$$

Якщо найбільшого значення нев'язки $\varepsilon_{\max} < 0.01$, то процедура обчислення об'ємних часток уздовж стінок припиняється.

Розглянемо теплообмін нанорідин в ламінарному граничному шарі на плоскій пластині. Для дослідження теплообміну в граничному шарі необхідно привести систему рівнянь (2.1.15) – (2.1.18) до безрозмірного виду. Для цього вводимо безрозмірні змінні

$$\xi = \frac{x u_{\infty} \rho_f}{\mu_f}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

Система рівнянь (2.1.8) – (2.1.11) в цих змінних для потоку нанорідини на гідродинамічно стабілізованій ділянці граничного шару має вигляд

$$\text{Pe} RC(\varphi) \left(\bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \text{Re} + \bar{v} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) = K(\varphi) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\bar{\rho} c}{\text{Le}} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + D \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 \right), \quad (2.2.10)$$

$$\text{Pe} \left(\bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \text{Re} + \bar{v} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) = \frac{1}{\text{Le}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + D \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right), \quad (2.2.11)$$

де

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_{\infty} - T_w}, \quad \text{Re} = \frac{u_{\infty} \delta \rho_f}{\mu_f}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu_f}{k_f c_f}, \quad \text{Pe} = \text{Re} \text{Pr},$$

$$\text{Le} = \frac{k_f}{D_B}, \quad D = \frac{T_0 - T_w}{T_0} \frac{D_T}{D_B}, \quad \bar{\rho} c = \frac{\rho_p c_p}{\rho_f c_f},$$

$$RC(\varphi) = (1 - \varphi) + \varphi \frac{\rho_p c_p}{\rho_f c_f}, \quad \bar{k} = \frac{k_p}{k_f}, \quad K(\varphi) = \frac{\bar{k} + 2 + 2\varphi(\bar{k} - 1)}{\bar{k} + 2 - \varphi(\bar{k} - 1)},$$

$$\delta = \frac{\gamma x}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad \bar{u} = f'(\eta), \quad \bar{v} = (\eta f'(\eta) - f(\eta)) \frac{\gamma^2}{\text{Re}}.$$

Система рівнянь (2.2.10), (2.2.11) розв'язувалась при наступних граничних умовах:

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \theta = 0,$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)_w = -\left(D\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)_w \quad \text{при } \eta = 0, \quad (2.1.12)$$

$$\bar{u} = 1, \quad \bar{v} = \bar{v}_\infty, \quad \theta = 1$$

$$\varphi = \varphi_\infty \quad \text{при } \eta = 1.$$

Остання умова в (2.1.12) означає непроникність стінки плоскої пластини.

Для дослідження теплообміну в граничному шарі за допомогою методу Монте-Карло необхідно представити рівняння (2.2.10) і (2.2.11) в кінцево-різницевого вигляді. Температура в будь-якій точці сітки виражається через температури сусідніх точок:

$$\theta(i, j) = P_{y+}\theta(i, j+1) + P_{x-}\theta(i-1, j) + P_{y-}\theta(i, j-1) + S \quad (2.2.13)$$

де

$$P_{y+} = \frac{\text{Le}K(\varphi)\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}}{\text{Den}_\theta}, \quad P_{x-} = \frac{\text{LePe}RC\bar{u}\Delta\eta}{\text{Den}_\theta},$$

$$P_{y-} = \frac{\frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}(\text{Le}K(\varphi) + \text{LePe}RC\text{Re}\bar{v}\Delta\eta + \bar{\rho}c(\varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j}))}{\text{Den}_\theta}, \quad S = \frac{D\bar{\rho}c\Delta\xi\Delta\eta\left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\right)^2}{\text{Den}_\theta},$$

$$\text{Den}_\theta = \text{LePe}RC(\bar{v}\Delta\xi + \text{Re}\bar{u}\Delta\eta) + \frac{\Delta\xi}{\Delta\eta}(2\text{Le}K(\varphi) + \bar{\rho}c(\varphi_{i,j-1} - \varphi_{i,j})).$$

Віртуальна частинка може перейти в одному із трьох напрямків, в іншому алгоритм обчислення температури залишається без змін. В результаті, формула для визначення температури в пограничному шарі приймає вигляд

$$\theta(i, j) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N\theta_w(n) + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N\left(\sum_{m=1}^{g_n}S_m\right) \quad (2.2.14)$$

Дискретна форма рівняння (2.2.11), яке відображає об'ємну долю часток в певній точці ламінарного пограничного шару, може бути виражена через об'ємну долю часток в сусідніх вузлах

$$\varphi(i, j) = P_{y+} \varphi(i, j+1) + P_{x-} \varphi(i-1, j) + P_{y-} \varphi(i, j-1) + F, \quad (2.2.15)$$

де

$$P_{y+} = \frac{\frac{\Delta \xi}{\Delta \eta}}{Den_{\varphi}}, \quad P_{x-} = \frac{Le Pe Re \bar{u} \Delta \eta}{Den_{\varphi}}, \quad P_{y-} = \frac{\frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} + Le Pe \bar{v} \Delta \xi}{Den_{\varphi}},$$

$$F = \frac{D \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} (\theta_{i,j+1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1})}{Den_{\varphi}}, \quad Den_{\varphi} = 2 \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} + Le Pe (\bar{v} \Delta \xi + Re \bar{u} \Delta \eta).$$

Границя на нижній стінці являється відбиваючим екраном и виражається за допомогою формули (2.2.7), на лівій і верхній границі поглинаючий екран. Таким чином, об'ємна частка наночастинок в певній точці $\varphi(i, j)$ буде рівна

$$\varphi(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_w(n) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^{g_n} F_m \right). \quad (2.2.16)$$

Послідовність ітерацій дослідження теплообміну нанорідин в граничному шарі ідентична вище описаній послідовності дослідження теплообміну в пласкому каналі. Спершу визначається температура однорідної рідини, без наночастинок. Далі розраховується об'ємна частка наночастинок на відстані Δl від нижньої границі $\varphi_{\Delta l}$ з врахуванням максимально допустимої величини нев'язки (2.2.9). Потім визначається об'ємна частка наночастинок в пограничному шарі. На третій ітерації визначається температура нанорідини.

2.3 Метод ґрат Больцмана

Метод ґрат Больцмана - LBM (Lattice Boltzmann Method) стає все більш популярним в області обчислювальної гідродинаміки (Computational Fluid Dynamics, CFD). У порівнянні з традиційними методами CFD, які вирішують макроскопічні рівняння переносу потоку рідини, маси і тепла, LBM використовує кінетичне рівняння Больцмана і відповідні відносини між

фактичною модельною статистичною динамікою на мікроскопічному рівні і рівняння переносу на макроскопічному рівні. Перевагами LBM є прості процедури обчислення, які підходять для паралельних обчислень; легкість і надійність при роботі з багатофазним потоком, складною геометрією, міжфазною динамікою [12]. Кілька стандартних тестових завдань були змодельовані за допомогою LBM і результати показали хороше узгодження з відповідними рішеннями Нав'є-Стокса [47].

Метод LBM [48 - 50] був створений на базі кінетичної теорії газів Людвіга Больцмана в наближенні BGK (Bhatnagar, Gross і Krook). Автори наближення зауважили, що головним ефектом зіткнення молекул є наближення функції розподілу швидкостей до рівноважного розподілу [51]. В подальшому ми будемо використовувати рівняння Больцмана в наближенні BGK, або наближенні одиничного часу релаксації

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{\tau} (f^e - f). \quad (2.3.1)$$

У рівнянні (2.3.1) f^e – рівноважний розподіл молекул, що відповідає розподілу Максвелла

$$f^e = \rho \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp \left(- \frac{m(\vec{v} - \vec{u})^2}{2kT} \right). \quad (2.3.2)$$

Представимо рівняння (2.3.1) в кінцево-різницевої формі

$$\frac{f(x_i + \Delta x_i, v_i, t + \Delta t) - f(x_i + \Delta x_i, v_i, t)}{\Delta t} + v_i \cdot \frac{f(x_i + \Delta x_i, v_i, t) - f(x_i, v_i, t)}{\Delta x_i} = \frac{(f^e - f)}{\tau}. \quad (2.3.3)$$

За рахунок дискретизації ми отримали кінечне число векторів швидкостей v_i . Простір представлений в вигляді решітки, де положення $x_i + v_i \Delta t$ повинне займати фіксоване положення в просторовій решітці, $\Delta x_i = v_i \Delta t$. Час приймає тільки цілочисельні значення. Оскільки вектори швидкості фіксовані, то

завичай позначають $f(x_i, v_i, t) = f(x_i, t)$. Використовуючи вищеописані позначення формула (2.3.3) набуває виду

$$\frac{f(x_i + \Delta x_i, t + \Delta t) - f(x_i, t)}{\Delta t} = \frac{f^e - f}{\tau} \quad (2.3.4)$$

Розкладаємо ліву частину рівняння (2.3.4) у ряд Тейлора до другого порядку

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \Delta t \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + v_i \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \right) + O(\partial^3) = \frac{f^e - f}{\tau} \quad (2.3.5)$$

Виразимо f з рівняння (2.3.1) і підставимо в (2.3.5)

$$\frac{\partial f^e}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + v_j \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f^e}{\partial t} + \tilde{v}_i \frac{\partial f^e}{\partial x_i} \right) \right) + O(\partial^3) = \frac{f^e - f}{\tau}. \quad (2.3.6)$$

Помножимо рівняння (2.3.6) на v_j і проінтегруємо отримане рівняння по v

$$\int v_i \left[\frac{\partial f^e}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \left(\tau - \frac{\Delta t}{2} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) + v_j \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f^e}{\partial t} + v_i \frac{\partial f^e}{\partial x_i} \right) \right) \right] dv = \int v_j \frac{f^e - f}{\tau} dv \quad (2.3.7)$$

Підставивши f^e з (2.3.2) і проінтегрувавши (2.3.7) одержимо

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial(\rho RT)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \left(\tilde{\tau} - \frac{1}{2} \right) \Delta t RT \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right) \quad (2.3.8)$$

де $\tilde{\tau} = \tau / \Delta t$, $R = k/m$.

Права частина рівняння (2.3.7) буде дорівнювати нулю, тому що згідно [52] інтеграл від інтеграла зіткнень, помноженого на інваріант зіткнення v дорівнює нулю. При виведенні рівняння (2.3.8) враховувалися співвідношення [5]

$$\begin{aligned} \rho &= \int f dv \\ \rho u &= \int v f dv \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Порівнюючи (2.2.8) з рівнянням Нав'є -Стокса можна побачити, що кінематична в'язкість визначається як

$$\nu = \left(\tilde{\tau} - \frac{1}{2} \right) \Delta t RT \quad (2.3.10)$$

Обезрозміривши (2.3.8) по мікромасштабах ґрат з врахуванням того, що середня швидкість часток

$$v_A = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{3RT}, \quad (2.3.11)$$

отримуємо безрозмірну форму в «ґратчастих» змінних для нестисливого потоку [5]

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u}_i \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{3} \left(\tilde{\tau} - \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right), \quad (2.3.12)$$

де

$$\tilde{u}_i = \frac{u_i}{v_A}, \quad \tilde{p} = \frac{p}{\rho v_A^2}, \quad \tilde{x}_i = \frac{x_i}{\Delta x}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\Delta t}. \quad (2.3.13)$$

З рівняння (2.3.12) одержуємо, що в'язкість для дискретної «ґратчастої» моделі

$$\tilde{\nu} = \frac{1}{3} \left(\tilde{\tau} - \frac{1}{2} \right) = \frac{2\tilde{\tau} - 1}{6}. \quad (2.3.14)$$

Щоб отримати можливість моделювати динаміку безперервного рівняння Больцмана (2.3.1) на комп'ютері нам необхідно його дискретизувати. Для цього спочатку введемо рівномірну сітку просторових координат - крок сітки, нехай, буде однаковим по всіх осях. Поведінка рідини ми будемо визначати саме в вузлах сітки. Фактично, ми дозволяємо молекулам перебувати тільки в певних просторових вузлах. Крім того, ми повинні дискретизувати час - ми будемо визначати стан рідини в рівновіддалені один від одного моменти часу. Крім того, ми дозволимо молекулам мати тільки певні значення швидкості - такі, щоб за проміжок часу вони встигали перейти в який-небудь сусідній вузол. Ці

дозволені напрямки будуть однаковими для всіх просторових вузлів. Очевидно, що по діагональних напрямках швидкості частинок будуть більші, ніж по недіагональних.

Для дискретних ґрат з кількістю швидкісних каналів рівним j вираз для розрахунку макропараметрів має такий вигляд

$$\begin{aligned}\tilde{\rho} &= \sum_j \tilde{f}_j, \\ \tilde{\rho}\tilde{u} &= \sum_j \tilde{v}_j \tilde{f}_j, \\ \tilde{p} &= \frac{1}{3} \sum_j (\tilde{v}_j - \tilde{u})^2 \tilde{f}_j, \\ \rho T &= \sum_j f_{T,j}\end{aligned}\tag{2.3.15}$$

Ґратчасте рівняння Больцмана складається з наступних рівнянь: (1) рівняння руху (2.3.4) з дискретизованим часом і фазовим простором, а простір імпульсів зводиться до малого набору дискретних імпульсів; (2) обмеження збереження у вигляді рівняння (2.3.15); (3) правильна рівноважна функція розподілу f^e , використовуючи яку можна прийти до рівнянь Нав'є-Стокса. Розподіл Максвелла (2.2.2) розкладаємо в ряд Тейлора по поточній швидкості потоку \tilde{u} , тому що вона набагато менше швидкості молекул ($\tilde{v} \gg \tilde{u}$). Отриманий вираз має вигляд

$$f^e = \tilde{\rho} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m\tilde{v}^2}{2kT} \right) \left(1 - \frac{\tilde{u}^2}{2RT} + \frac{\tilde{v} \cdot \tilde{u}}{RT} + \frac{\tilde{v}^2 \tilde{u}^2}{2RT} \right)\tag{2.3.16}$$

Згідно [53] обчислення таких макропараметрів, як щільність, швидкість і енергія в тривимірному просторі еквівалентно обчисленню інтеграла

$$I = \int \Psi(\tilde{v}) \tilde{f}^e d\tilde{v} = \tilde{\rho} \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int \Psi(\tilde{v}) \exp\left(-\frac{m\tilde{v}^2}{2kT} \right) \left(1 - \frac{\tilde{u}^2}{2RT} + \frac{\tilde{v} \cdot \tilde{u}}{RT} + \frac{\tilde{v}^2 \tilde{u}^2}{2RT} \right) d\tilde{v}\tag{2.3.16}$$

де $\Psi(\tilde{v})$ є поліноміальною функцією від \tilde{v} .

В методі ґрат Больцмана будь-яка ґратка повинна мати нульовий вектор з вузла в себе самого - він описує частинки, які нікуди не переходять з даного вузла. При описі ґрат користуються аббревіатурою D_iQ_j , де i - розмірність простору, j - число векторів в решітці.

У двовимірному просторі LBM ґратка може складатися, наприклад, з 5 векторів (2 вертикальних, 2 горизонтальних і нульовий вектор з вузла в себе самого), а може з 9 векторів (2 вертикальних, 2 горизонтальних, 4 діагональних, один нульовий) (рис 2.3.1). Це ґратки $D2Q5$ і $D2Q9$, відповідно.

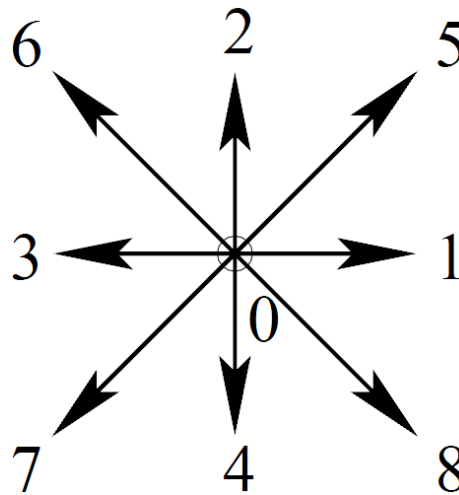


Рис. 2.3.1 Вектори в ґратці $D2Q9$

Для ґрат $D2Q9$ приймемо функцію $\Psi(\tilde{v})$ у вигляді

$$\Psi_{m,n}(\tilde{v}) = \tilde{v}_x^m \tilde{v}_y^n. \quad (2.3.17)$$

Підставимо (2.3.17) в (2.3.16), в результаті чого інтеграл (2.3.16) набуде вигляду

$$I = \frac{\tilde{\rho}}{\pi} (\sqrt{2RT})^{m+n} \left\{ \left(1 - \frac{\tilde{u}^2}{2RT} \right) I_m I_n + \frac{2(\tilde{u}_x I_{m+1} I_n + \tilde{u}_y I_m I_{n+1})}{\sqrt{2RT}} + \frac{\tilde{u}_x^2 I_{m+2} I_n + 2\tilde{u}_x \tilde{u}_y I_{m+1} I_{n+1} + \tilde{u}_y^2 I_m I_{n+2}}{RT} \right\}, \quad (2.3.18)$$

де

$$I_m = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\zeta^2} \zeta^m d\zeta, \quad \zeta = \frac{\tilde{v}}{\sqrt{2RT}}. \quad (2.3.19)$$

Використовуючи формулу Ерміта для інтегрування, одержимо

$$I_m = \sum_{j=1}^3 \omega_j \zeta_j^m \quad (2.3.20)$$

Для трьох значень змінної ζ

$$\zeta_1 = -\sqrt{3/2}, \quad \zeta_2 = 0, \quad \zeta_3 = \sqrt{3/2}, \quad (2.3.21)$$

вагові коефіцієнти будуть мати наступні значення

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{6}, \quad \omega_2 = 2\frac{\sqrt{\pi}}{3}, \quad \omega_3 = \frac{\sqrt{\pi}}{6}. \quad (2.3.22)$$

Таким чином, інтеграл (2.3.18) набуде наступного вигляду

$$I = \frac{\tilde{\rho}}{\pi} \sum_{i,j=1}^3 \omega_i \omega_j \Psi(\tilde{v}_{i,j}) \left[1 + \frac{(\tilde{v}_{i,j} \cdot \tilde{u})}{RT} + \frac{(\tilde{v}_{i,j} \cdot \tilde{u})^2}{2(RT)^2} - \frac{\tilde{u}^2}{2RT} \right], \quad (2.3.23)$$

де $\tilde{v}_{i,j} = (\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) = \sqrt{2RT}(\zeta_i, \zeta_j)$.

Порівнюючи вирази (2.3.15) і (2.3.23), функцію рівноважного розподілу можна представити наступним чином

$$\tilde{f}_{i,j}^e = \frac{\omega_i \omega_j}{\pi} \tilde{\rho} \left[1 + \frac{(\tilde{v}_{i,j} \cdot \tilde{u})}{RT} + \frac{(\tilde{v}_{i,j} \cdot \tilde{u})^2}{2(RT)^2} - \frac{\tilde{u}^2}{2RT} \right] \quad (2.3.24)$$

Визначимо координати положень решіток для кожного з напрямків j і кутів Θ , що відповідають напрямкам

$$e_j = \begin{cases} (0,0), & j=0 \\ (\cos \Theta_j, \sin \Theta_j)c, & \Theta_j = (j-1)\pi/2, \quad j=1,2,3,4, \\ \sqrt{2}(\cos \Theta_j, \sin \Theta_j)c, & \Theta_j = (j-5)\pi/2 + \pi/4, \quad j=5,6,7,8 \end{cases} \quad (2.3.25)$$

або

$$e_j = \begin{cases} (0,0) & j = 0 \\ (1,0)c, (0,1)c, (-1,0)c, (0,-1)c & j = 1,2,3,4. \\ (1,1)c, (-1,1)c, (-1,-1)c, (1,-1)c & j = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (2.3.26)$$

Значення вагових коефіцієнтів для кожного напрямку

$$w_i = \begin{cases} 4/9, & j = 0 \\ 1/9, & j = 1,2,3,4 \\ 1/36, & j = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (2.3.27)$$

Враховуючи вираз для швидкості звуку в ґратах

$$RT = c_s^2 = \frac{c^2}{3} \quad (2.3.28)$$

можемо записати вираз для рівноважного розподілу часток

$$\tilde{f}_{i,j}^e = w_j \tilde{\rho} \left[1 + \frac{3(e_j \cdot \tilde{u})}{c^2} + \frac{9(e_j \cdot \tilde{u})^2}{2c^4} - \frac{3\tilde{u}^2}{2c^2} \right]. \quad (2.3.29)$$

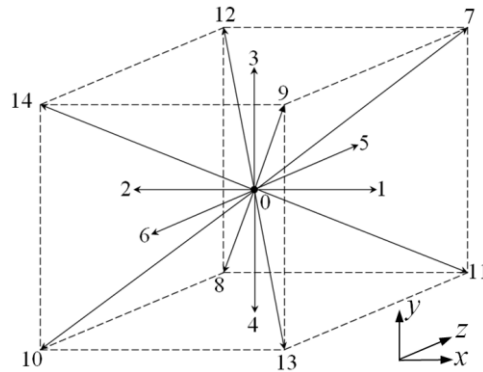


Рис. 2.3.2 Вектори в ґратці $D3Q15$

Для тривимірного моделювання зазвичай використовуються ґрати $D3Q15$ (рис. 2.3.2). За аналогією до перетворень (2.3.16) – (2.3.23) для решітки $D2Q9$, визначимо координати положень решіток для кожного з напрямків тривимірних ґрат $D3Q15$ [5]

$$e_j = \begin{cases} (0,0,0) & j = 0 \\ (\pm 1,0,0)_c, (0,\pm 1,0)_c, (0,0,\pm 1)_c & j = 1,2,\dots,6, \\ (\pm 1,\pm 1,\pm 1)_c, (\pm 1,\pm 1,\mp 1)_c, (\pm 1,\mp 1,\pm 1)_c, (\mp 1,\pm 1,\pm 1)_c & j = 7,8,\dots,14 \end{cases} \quad (2.3.30)$$

Значення вагових коефіцієнтів для ґрат $D3Q15$

$$w_i = \begin{cases} 2/9, & j = 0 \\ 1/9, & j = 1,2,\dots,6 \\ 1/72, & j = 7,8,\dots,14 \end{cases} \quad (2.3.31)$$

Рівняння Больцмана в наближенні BGK для енергії можна представити наступним чином

$$\frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{v}_i \cdot \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{1}{\tau} (\tilde{g}^e - \tilde{g}) \quad (2.3.32)$$

де рівноважний розподіл енергії \tilde{g}^e відповідає розподілу Максвелла. Вираз для розрахунку енергії на решітках швидкісних каналів має вигляд $\tilde{p}^e = \sum_j \tilde{g}_j$, де рівноважний розподіл енергії для решіток $D2Q9$ можна визначити по формулах [5]

$$\tilde{g}_j^e = w_j \tilde{T} \left[1 + \frac{3(e_j \cdot \tilde{u})}{c^2} + \frac{9(e_j \cdot \tilde{u})^2}{2c^4} - \frac{3\tilde{u}^2}{2c^2} \right], \quad (2.3.33)$$

а вагові коефіцієнти для кожного напрямку розраховуються на основі виразу (2.3.27).

Для моделювання нестисливого потоку в мікроканалі, що викликаний перепадом тиску, використовується підхід, який запропонований в роботі [p2.п2.2]. У цьому випадку поняття псевдо-нестисливої рідини пов'язано з введенням щільності вузла, заданого формулою

$$\rho = \frac{P}{c_s^2 \rho_*}, \quad (2.3.34)$$

де ρ_* - постійна густина нестисливого середовища, і швидкість звуку

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}}. \quad (2.3.35)$$

Зовнішня сила в рівнянні (2.3.15), згідно роботи [54], може бути записана

$$F_j = \frac{3G \cdot (e_j \cdot u)}{c} f^e \quad (2.3.36)$$

де

$$G = \beta g \varphi k, \quad (2.3.37)$$

і k - одиничний вектор, напрямлений в напрямку потоку

Рівноважний розподіл енергії задається рівнянням

$$f_{T,j}^e = \begin{cases} -\frac{3u^2}{2c^2}, & j=0, \\ w_j \rho \left[\frac{3}{2} + \frac{3(e_j \cdot u)}{2c^2} + \frac{9(e_j \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right], & j=1,2,3,4, \\ w_j \rho \left[3 + \frac{6(e_j \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_j \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right], & j=5,6,7,8 \end{cases} \quad (2.3.38)$$

Необхідно пов'язати макропараметри граничних умов з мікропараметрами функції розподілу. У нашій моделі, описаній в 3 розділі, встановлені наступні граничні умови: умова швидкості проковзування на стіні та періодичні межові умови для вхідного отвору / вихідного отвору.

Періодичні межові умови накладаються у напрямку потоку шляхом обробки вхідних / вихідних комірок як найближчих сусідів. Таким чином, накладання періодичних умов виконується як частина потокової операції, так що обчислені розподіли на виході решітки переносяться на вхід в якості заданих граничних умов. Це забезпечує збереження маси.

Для стінки, що обмежує праву межу ґратки зі швидкістю проковзування \tilde{u}_w , невідома функції розподілу \tilde{f}_3 , \tilde{f}_6 та \tilde{f}_7 перераховуються за допомогою наступних співвідношень.

$$\tilde{f}_3 = \tilde{f}_1,$$

$$\tilde{f}_6 = \tilde{f}_8 - \frac{1}{2}(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_4) + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\tilde{u}_w,$$

$$\tilde{f}_7 = \tilde{f}_5 + \frac{1}{2}(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_4) + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\tilde{u}_w, \quad (2.3.39)$$

тоді як стіною, що обмежує ліву межу ґратки зі швидкістю проковзування \tilde{u}_w , невідомі функції розподілу \tilde{f}_1 , \tilde{f}_5 та \tilde{f}_8 задаються виразами

$$\tilde{f}_1 = \tilde{f}_3,$$

$$\tilde{f}_5 = \tilde{f}_7 - \frac{1}{2}(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_4) + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\tilde{u}_w,$$

$$\tilde{f}_8 = \tilde{f}_6 + \frac{1}{2}(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_4) + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\tilde{u}_w. \quad (2.3.40)$$

Де \tilde{f} - нормалізована функція розподілу молекул, яка пов'язана з f за допомогою наступного рівняння [53]

$$\tilde{f}_j = W_j f, \quad (2.3.41)$$

$$W_j = w_j (2\pi RT)^{d/2} \exp\left(-\frac{c}{2RT}\right), \quad (2.3.42)$$

в той час як

$$\tilde{u} = \frac{u}{c}. \quad (2.3.43)$$

Під час моделювання мікропотоків, час релаксації розраховується з використанням числа Кнудсена, але без в'язкості рідини. Взаємозв'язок числа Кнудсена з безрозмірним часом релаксації виглядає так [55]

$$\tilde{\tau} = \text{Kn}N_y + \frac{1}{2}, \quad (2.3.44)$$

$$\tilde{\tau}_T = \frac{\text{Kn}}{\text{Pr}} N_y + \frac{1}{2}, \quad (2.3.45)$$

де

$$\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\Delta t}, \quad \tilde{\tau}_T = \frac{\tau_T}{\Delta t}, \quad (2.3.46)$$

і N_y - кількість елементів у стовпці ґратки вздовж каналу. Швидкість проковзування на стіні обчислюється за формулою

$$u_w = \tilde{u}'_y \frac{\text{Kn} N_y}{(1 + \text{Kn} N_y)}, \quad (2.3.47)$$

де \tilde{u}'_y - складова швидкості потоку вздовж каналу у комірці, яка знаходиться в безпосередній близькості з стінкою.

Граничні умови для функцій розподілу температури $f_{T,j}^e$ задаються відповідно до пропускень, зазначених в роботі [56]. Наприклад, температура стінки комірок задана як

$$T_w = T' \frac{(\text{Kn}/\text{Pr})N_y}{(1 + (\text{Kn}/\text{Pr})N_y)} \quad (2.3.48)$$

де T' - температура в клітці у комірці, яка знаходиться у безпосередній близькості з стінкою.

Алгоритм можна підсумувати наступним чином [57]:

1. Ініціалізація $\tilde{\rho}$, \tilde{u} , \tilde{f}_j , і \tilde{f}_j^e .
2. Етап потокової передачі (streaming step): зміщуємо $\tilde{f}_j \rightarrow \tilde{f}_j^*$ в напрямку e_j .
3. Розраховуємо макроскопічні $\tilde{\rho}$ і \tilde{u} із \tilde{f}_j^* використовуючи (2.3.15).
4. Розраховуємо \tilde{f}_j^e використовуючи (2.3.29).

5. Етап зіткнень (collision step): розраховуємо оновлену функцію розподілу

$$\tilde{f}_j = \tilde{f}_j^* - \frac{1}{\tau}(\tilde{f}_j^* - \tilde{f}_j^e)$$
 використовуючи (2.3.4).

6. Повторення кроків з 2 по 5.

Моделювання зазвичай відбувається до того часу, поки система не знаходиться в стаціонарному стані. Стаціонарність можна перевірити, наприклад, через різницю макроскопічних швидкостей і мас в кожному вузлі між сусідніми кроками.

2.4 Метод збурень

Даний підрозділ присвячено використанню доволі новітніх стохастичних методів моделювання теплофізичних процесів. Для верифікації цих методів можна використати перевірені традиційні підходи. Один з таких підходів це метод збурень, який дуже часто застосовується для вивчення гідродинамічної та теплової нестійкості. Найпоширеніші види такої нестійкості це ламінарно – турбулентний перехід [58], різноманітні типи вільної конвекції [59] та біоконвекції [60, 61], відцентрова нестійкість [62] та інші.

Відомо, що найбільш поширеною формою руху рідини є турбулентна течія. Ламінарний рух зустрічається значно рідше: при досить малих числах Рейнольдса В деяких випадках рівняння гідродинаміки формально мають точне стаціонарне рішення при стаціонарних граничних умовах для будь-яких чисел Рейнольдса. Однак такі рішення не завжди можна реалізувати. Це пов'язано з тим, що реальний потік повинні не тільки описуватися рівняннями гідромеханіки, а й бути стійкими відносно малих збурень, завжди наявних в потоці. Рейнольдс висунув, а Релей розвинув гіпотезу, згідно якої перехід ламінарного течії в турбулентну являється наслідком нестійкості ламінарної течії. Багато положень цієї теорії підтвержені експериментальними дослідженнями [63].

Питання про стійкість даної течії обумовлює необхідність розв'язання складної системи нелінійних рівнянь в частинних похідних. Однак багато проблем, пов'язаних з стійкістю потоків, можна вирішити, ґрунтуючись на рішенні лінеаризованих рівнянь для нескінченно малих збурень. Такий підхід дозволяє досліджувати початкову стадію переходу ламінарної течії в турбулентну. Дослідження цієї стадії необхідно, оскільки вона багато в чому визначає подальший розвиток течії і дає можливість якісно і кількісно оцінити вплив тих чи інших фактів на перехід до турбулентності [63].

Основою дослідження стійкості течій в'язкої нестисливої рідини є система рівнянь руху Нав'є-Стокса і рівняння нерозривності. Розв'язання цієї системи при конкретних граничних умовах представляється в вигляді суми основної течії, стійкість якої підлягає розгляду, і збуреної, накладеної на основну.

Розглянемо диференціальне рівняння

$$M[y] = \lambda N[y] \quad (2.4.1)$$

з крайовими умовами

$$U_{\mu}[y] = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, k \quad (2.4.2)$$

Заради простоти ми опишемо цей метод для випадку однієї незалежної змінної x , він точно так само буде справедливий для диференціальних рівнянь з частинними похідними і для більшої кількості змінних, потрібно тільки тоді інтегрування поширити на всю основну область [47].

Нехай відомо рішення іншої задачі на власні значення

$$M^*[y] = \lambda^* N^*[y], \quad (2.4.3)$$

$$U_{\mu}[y] = 0$$

з тими ж крайовими умовами, що і вихідна задача, але з коефіцієнтами диференціального рівняння, дещо відмінними від коефіцієнтів рівняння (2.4.1). Нехай n -а власна функція, яку ми позначимо $y_n^* = y_{n,0}$ відповідає власному значенню $\lambda_n^* = \lambda_{n,0}$. Задача з відомим рішенням $y_{n,0}$ називається «незбуреної» задачею, а задача (2.4.1), (2.4.2), рішення якої потрібно знайти, «збуреною» задачею з членами збурення

$$\bar{M}[y] = M[y] - M^*[y], \quad \bar{N}[y] = N[y] - N^*[y]. \quad (2.4.4)$$

Стосовно незбуреної задачі (2.4.3), (2.4.2) припустимо, що вона самоспряжена, і для власних функцій справедливо

$$\int_a^b y_{n,0} N^*[y_{n,0}] dx > 0. \quad (2.4.4)$$

Для збуреної задачі в даному випадку само-спряження не потрібно.

Введемо тепер параметр збурення ε і утворюємо однопараметричне сімейство задач на власні значення:

$$\begin{aligned} M^*[y] + \varepsilon \bar{M}[y] &= \lambda \{ N^*[y] + \varepsilon \bar{N}[y] \}, \\ U_\mu[y] &= 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, k). \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Тоді $\varepsilon = 0$ буде відповідати незбуреній задачі, а $\varepsilon = 1$ незбуреній.

Власна функція y_n нової задачі (2.4.5) розглядається в залежності від ε . На даному етапі використовується припущення, що n -е власне значення λ_n і n -а власна функція y_n можуть бути розкладені в степеневі ряди по ε і ці ряди сходяться при $\varepsilon = 1$, причому $M[y_n]$ і $N[y_n]$ можуть бути утворені шляхом їх почленного диференціювання. Отже,

$$y_n = y_{n,0} + \varepsilon y_{n,1} + \varepsilon^2 y_{n,2} + \dots; \quad \lambda_n = \lambda_{n,0} + \varepsilon \lambda_{n,1} + \varepsilon^2 \lambda_{n,2} + \dots \quad (2.4.6)$$

Розглянемо спочатку випадок, коли $\lambda_{n,0}$ являється простим власним значенням незбуреної задачі.

Підставляючи (2.4.6) в (2.4.5), отримаємо

$$\sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v M^*[y_{n,v}] + \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v \bar{M}[y_{n,v-1}] = \left(\sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v \lambda_{n,v} \right) \left(\sum_{v=0}^{\infty} \varepsilon^v N^*[y_{n,v}] + \sum_{v=1}^{\infty} \varepsilon^v \bar{N}[y_{n,v-1}] \right) \quad (2.4.7)$$

Перемноживши ряди і прирівнюючи коефіцієнти при однакових ступенях ε , матимемо

$$\text{біля } \varepsilon^0: M^*[y_{n,0}] = \lambda_{n,0} N^*[y_{n,0}], \quad (2.4.7)$$

$$\text{біля } \varepsilon: M^*[y_{n,1}] + \bar{M}[y_{n,0}] = \lambda_{n,1} N^*[y_{n,0}] + \lambda_{n,0} (N^*[y_{n,1}] + \bar{N}[y_{n,0}]), \quad (2.4.8)$$

$$\text{біля } \varepsilon^v: M^*[y_{n,v}] + \bar{M}[y_{n,v-1}] = \lambda_{n,v} N^*[y_{n,0}] + \sum_{\rho=1}^v \lambda_{n,v-\rho} (N^*[y_{n,\rho}] + \bar{N}[y_{n,\rho-1}]). \quad (2.4.9)$$

Рівняння (2.4.7) співпадає з рівнянням (2.4.3) і автоматично виконується. Внаслідок передбачуваної самоспряженості незбуреної задачі невідомі $\lambda_{n,1}$, $y_{n,1}$, $\lambda_{n,2}$, $y_{n,2}$, ... можна визначити наступним чином. Якщо помножити (2.4.8) на $\lambda_{n,0}$ і проінтегрувати по всій області, то, враховуючи (2.4.7), отримаємо

$$\int_a^b y_{n,0} (M^*[y_{n,1}] - \lambda_{n,0} N^*[y_{n,1}]) dx = \int_a^b y_{n,1} (M^*[y_{n,0}] - \lambda_{n,0} N^*[y_{n,0}]) dx = 0$$

звідки

$$\lambda_{n,1} = \frac{\int_a^b y_{n,0} (\bar{M}[y_{n,0}] - \lambda_{n,0} \bar{N}[y_{n,0}]) dx}{\int_a^b y_{n,0} N^*[y_{n,0}] dx}. \quad (2.4.10)$$

Аналогічно з (2.4.9) при $v=2$ знайдемо

$$\lambda_{n,2} = \frac{\int_a^b y_{n,0} (\overline{M}[y_{n,1}] - \lambda_{n,1} \overline{N}[y_{n,0}] - \lambda_{n,1} N^*[y_{n,1}] - \lambda_{n,0} \overline{N}[y_{n,1}]) dx}{\int_a^b y_{n,0} N^*[y_{n,0}] dx}. \quad (2.4.10)$$

Обчислювальний процес, таким чином, полягає в наступному. При відомих $y_{n,0}$ і $\lambda_{n,0}$ обчислюють $\lambda_{n,1}$ з (2.4.10), для цього будуть потрібні (крім диференціювання і елементарних операцій) тільки квадратури. Після обчислення $\lambda_{n,1}$ знаходять $y_{n,1}$, вирішуючи крайову задачу, причому $y_{n,1}$ має задовольняти диференціальне рівнянь (2.4.8), тобто рівняння

$$M^*[y_{n,1}] - \lambda_{n,0} N^*[y_{n,1}] = r(x) = -\overline{M}[y_{n,0}] + \lambda_{n,0} \overline{N}[y_{n,0}] + \lambda_{n,1} N^*[y_{n,0}] \quad (2.4.12)$$

з крайовими умовами (2.4.2).

Ця неоднорідна крайова задача має розв'язок, так як відповідна однорідна задача є незбуреною задачею на власні значення (2.4.3), (2.4.2). Рішення неоднорідної задачі можна знайти, якщо права частина $r(x)$ ортогональна до власних функцій $y_{n,0}$

$$\int_a^b r(x) y_{n,0}(x) dx = 0 \quad (2.4.13)$$

Функція $y_{n,1}$ визначається крайовою задачею (2.4.12) не однозначно, а з точністю до $y_{n,0}$ з постійним коефіцієнтом, але ми можемо відкинути цей додатковий член при $y_{n,1}$, вважаючи, що він вже врахований при розкладанні (2.4.6) в $y_{n,0}$.

Якщо $y_{n,1}$ визначено, то для обчислення $\lambda_{n,2}$ будуть потрібні тільки квадратури. Для обчислення $y_{n,2}$ знову потрібно вирішити крайову задачу: $y_{n,2}$ повинно задовольняти диференціальне рівняння (2.4.9) при $\nu=2$ і крайових умовах (2.4.2). Ця крайова задача теж має розв'язок, так як виконана відповідна

умова (2.4.13). Аналогічно знаходяться $\lambda_{n,i}$ і $y_{n,i}$. Часто буває досить одного $\lambda_{n,1}$, так що для його знаходження не потрібно вирішувати крайових задач.

Найбільший інтерес при вирішенні задач на визначення критеріїв стійкості представляє найменше власне значення. Використовуючи теорему про мінімальний властивості найменшого власного значення, в роботі [64] показано, що найменше власне значення кінцево-різницевої задачі $\lambda_{n,1}^M$ при $M \rightarrow \infty$ (M - кількість розбиттів області інтегрування) сходиться до найменшого власного значення $\lambda_{n,1}$ вихідної задачі в диференціальній постановці. Причому помилка зі зменшенням кроку h^* наближається до нуля як h^{*2} [64], тобто

$$|\lambda_{n,1} - \lambda_{n,1}^M| \leq \text{const } h^{*2} \quad (2.4.14)$$

В задачі по знаходженню критеріїв відцентрової нестійкості найменші власні значення визначаються у вигляді функціональної залежності чисел Гертлера або Діна від безрозмірного хвильового числа $\bar{\sigma}$. Обидва числа (Гертлера і Діна) включають два безрозмірних параметри: число Рейнольдса і параметр кривизни. Для знаходження ми мінімальними значення числа Гертлера або Діна всі параметри системи диференціальних рівнянь фіксувалися, крім числа Рейнольдса або параметра кривизни. При розрахунку мінімально можливого критерію стійкості виконують по кроковий розрахунок власних значень, починаючи з встановлення нульового значення числа Рейнольдса або параметра кривизни [65].

Висновки до розділу 2

Розглянуто узагальнюючу математичну модель тепломасобміну та гідродинаміки нанорідин та мікроканалів та математичні методи їх аналізу. Для часткових випадків вказані математичні моделі можуть бути спрощені. Зокрема представлено математичну модель Бонжорно в безрозмірених змінних для

плоского каналу зі стаціонарним потоком нанорідин, а також математична модель для граничного шару на плоскій пластині.

Для реалізації вказаних математичних моделей запропоновані наступні методи: методом Монте-Карло, метода ґрат Больцмана та метод збурень.

Методом Монте-Карло дає можливість швидко отримувати результати дослідження теплообміну в локальній точці. Описано алгоритм дослідження теплообміну нанорідин в плоскому каналі та граничному шарі на плоскій пластині, який базується на методі Монте-Карло.

Метод ґрат Больцмана застосовується в області обчислювальної гідродинаміки. LBM використовує кінетичне рівняння Больцмана, яке представлено в спрощеній формі і зручне для використання метода частинок. Це рівняння встановлює зв'язок між фактичною модельною статистичною динамікою на мікроскопічному рівні і рівняння переносу на макроскопічному рівні. Описано послідовність ітерацій для двовимірних та трьохвимірних задач.

Метод збурень застосовується для вивчення гідродинамічної та теплової нестійкості. Метод збурень адаптовано для аналізу різноманітних видів гідродинамічної та теплової нестійкості, зокрема відцентрової. Для реалізації методу збурень застосовуються різні чисельні підходи, зокрема для знаходження критеріїв відцентрової нестійкості можуть бути використані метод кінцевих різниць, або клас методів Гальоркіна.

РОЗДІЛ 3

МЕТОД ГРАТ БОЛЬЦМАНА

3.1 Змішана конвекція в вертикальному плоскому мікроканалі

Розглянемо двовимірну змішану природну та вимушену конвекцію у повністю розвиненому ламінарному потоці у вертикальному каналі, зображеному на рис. 3.1.1. Вимушена конвекція спрямована вгору. Ця задача розглянута в роботі [66]

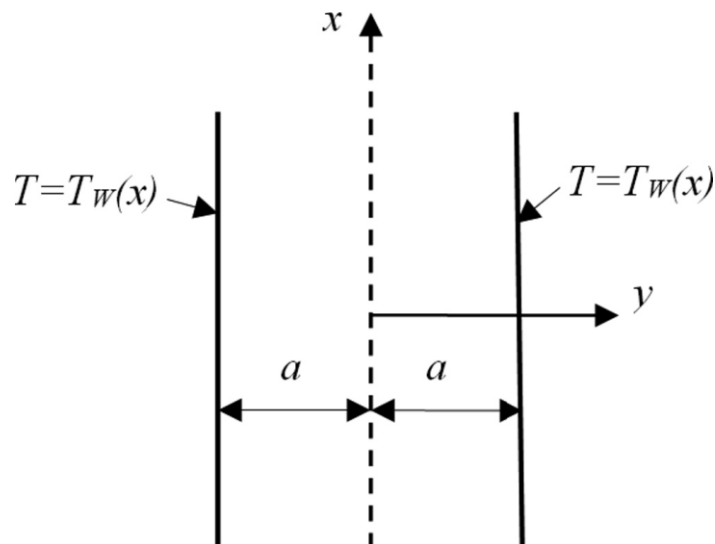


Рис. 3.1.1 Схематичне зображення геометрії потоку

Метод ґрат Больцмана (LBM) базується на дискретизації рівняння Больцмана в наближенні Батнагара - Гросса - Крука (БГК) [67]. Рівняння Больцмана для руху та енергії в наближенні БГК в кінцевій різницевій формі можна представити наступним чином [53]

$$\frac{f(x_i + \Delta x_i, t + \Delta t) - f(x_i, t)}{\Delta \tilde{t}} = \frac{f^e - f}{\tau} + F(x_i, t),$$
$$\frac{f_T(x_i + \Delta x_i, t + \Delta t) - f_T(x_i, t)}{\Delta t} = \frac{f_T^e - f_T}{\tau_T} \quad (3.1.1)$$

Для моделювання на основі ґрат Больцмана необхідно задати зовнішню силу (архімедову) в рівнянні (3.1.1). Згідно роботі [54], може бути записана

$$F_j = \frac{3G \cdot (e_j - u)}{c} f^e \quad (3.1.2)$$

де

$$G = \beta g \phi k, \quad (3.1.3)$$

і k - одиничний вектор, напрямлений в напрямку потоку.

Рівноважний розподіл енергії задається рівнянням

$$f_{T,j}^e = \begin{cases} -\frac{3u^2}{2c^2}, & j=0, \\ w_j \rho \left[\frac{3}{2} + \frac{3(e_j \cdot u)}{2c^2} + \frac{9(e_j \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right], & j=1,2,3,4,s \\ w_j \rho \left[3 + \frac{6(e_j \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_j \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right], & j=5,6,7,8 \end{cases} \quad (3.1.4)$$

Необхідно пов'язати макропараметри граничних умов з мікропараметрами функції розподілу. У нашій моделі встановлені наступні граничні умови: умова швидкості проковзування на стіні та періодичні межові умови для вхідного отвору / вихідного отвору.

Періодичні межові умови накладаються у напрямку потоку шляхом обробки вхідних / вихідних комірок як найближчих сусідів. Таким чином, накладання періодичних умов виконується як частина потокової операції, так що обчислені розподіли на виході решітки переносяться на вхід в якості заданих граничних умов. Це забезпечує збереження маси.

Для стінки, що обмежує праву межу ґратки зі швидкістю проковзування \tilde{u}_w , невідома функції розподілу \tilde{f}_3 , \tilde{f}_6 та \tilde{f}_7 перераховуються за допомогою наступних співвідношень.

$$\tilde{f}_3 = \tilde{f}_1,$$

$$\tilde{f}_6 = \tilde{f}_8 - \frac{1}{2}(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_4) + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\tilde{u}_w,$$

$$\tilde{f}_7 = \tilde{f}_5 + \frac{1}{2}(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_4) + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\tilde{u}_w, \quad (3.1.5)$$

тоді як стіною, що обмежує ліву межу ґратки зі швидкістю проковзування \tilde{u}_w , невідомі функції розподілу \tilde{f}_1 , \tilde{f}_5 та \tilde{f}_8 задаються виразами

$$\tilde{f}_1 = \tilde{f}_3,$$

$$\tilde{f}_5 = \tilde{f}_7 - \frac{1}{2}(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_4) + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\tilde{u}_w,$$

$$\tilde{f}_8 = \tilde{f}_6 + \frac{1}{2}(\tilde{f}_2 - \tilde{f}_4) + \frac{1}{2}\tilde{\rho}\tilde{u}_w. \quad (3.1.6)$$

Де \tilde{f} - нормалізована функція розподілу молекул, яка пов'язана з f за допомогою наступного рівняння [53]

$$\tilde{f} = W_j f, \quad (3.1.7)$$

$$W_j = w_j (2\pi RT)^{d/2} \exp\left(\frac{c}{2RT}\right), \quad (3.1.8)$$

в той час як

$$\tilde{u} = \frac{u}{c}. \quad (3.1.9)$$

Під час моделювання мікропотоків, час релаксації розраховується з використанням числа Кнудсена, але без в'язкості рідини. Взаємозв'язок числа Кнудсена з безрозмірним часом релаксації виглядає так [55]

$$\tilde{\tau} = \text{Kn} N_y + \frac{1}{2} \quad (3.1.10)$$

$$\tilde{\tau}_T = \frac{\text{Kn}}{\text{Pr}} N_y + \frac{1}{2} \quad (3.1.11)$$

де

$$\tilde{\tau} = \frac{\tau}{\Delta t}, \quad \tilde{\tau}_T = \frac{\tau_T}{\Delta t}, \quad (3.1.12)$$

і N_y - кількість елементів у стовпці ґратки вздовж каналу. Швидкість проковзування на стіні обчислюється за формулою

$$u_w = \tilde{u}'_y \frac{\text{Kn} N_y}{(1 + \text{Kn} N_y)} \quad (3.1.13)$$

де \tilde{u}'_y - складова швидкості потоку вздовж каналу у комірці, яка знаходиться в безпосередній близькості з стінкою.

Граничні умови для функцій розподілу температури $f_{T,j}^e$ задаються відповідно до пропускень, зазначених в роботі [56]. Наприклад, температура стінки комірок задана як

$$T_w = T' \frac{(\text{Kn}/\text{Pr})N_y}{(1 + (\text{Kn}/\text{Pr})N_y)} \quad (3.1.14)$$

де T' - температура в клітці у комірці, яка знаходиться у безпосередній близькості з стінкою.

Потік у мікроканалі моделювали за допомогою ґратки $D2Q9$ (див. рис. 2.3.1) з кількістю комірок 40×600 . Критерій конвергенції для різниці між значеннями швидкості на виході для послідовних ітераційних кроків був встановлений $< 0.1\%$. Розрахунки виконані в системі програмування GNU Octave, сумісній з MATLAB.

Для перевірки адекватності методу LBM необхідно порівняти дані чисельного моделювання з якимось еталонним рішенням. Краще всього для цього використовувати аналітичне наближення. Тому розглянемо таке рішення

Для цієї фізичної задачі визначальні рівняння виглядають так

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.1.15)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho g \beta (T - T_w) \quad (3.1.16)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (3.1.17)$$

Згідно Тао [68], математична модель для задач теплопровідності в такому каналі може бути доповнена термічною граничною умовою, що характеризує постійний осьовий температурний градієнт A на стінці вздовж вертикальної осі x , тобто $T_w = Ax$.

Цю граничну умову можна інтерпретувати як постійний тепловий потік на стінці.

В даному підрозділі під осьовою змінною ми будемо мати на увазі зміну функції вздовж вертикальної осі x .

Градієнт температури осьової стінки постійний; отже, зміна температури осьової стінки є лінійною. Оскільки температура стінки змінюється лінійно, а форма профілю температури в поперечному перерізі каналу (тобто вздовж осі y) повинна бути незалежною від координати x для повністю розвинутого ламінарного потоку, розглянутого в цій роботі, то цей профіль температури також повинен змінюватися лінійно по відношенню до координати x , так що різниця температур

$$T(x, y) - T_w = T(x, y) - Ax = \phi(y) \quad (3.1.18)$$

стає незалежною від координати.

Тепловий потік через інтерфейс твердого газу в мікроканалах створює стрибок температури, який можна визначити

$$\Delta T_i \sim L \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}. \quad (3.1.19)$$

Тепер ми можемо ввести наступні граничні умови проковзування

$$u = \gamma L \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \phi = \frac{\gamma L}{\text{Pr}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{при } y = -a \quad (3.1.20)$$

$$u = -\gamma L \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \phi = -\frac{\gamma L}{\text{Pr}} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \text{при } y = a \quad (3.1.21)$$

Граничні умови для відносної температури ϕ являються наслідком виразу (3.1.19). Теорія коефіцієнта в'язкого ковзання γ викладена в роботах [69] - 71].

Введемо безрозмірні параметри у наступному вигляді

$$Y = \frac{y}{a}, \quad U = \frac{u}{E}, \quad \Theta = \frac{\alpha \phi}{A a^2 E}, \quad (3.1.22)$$

$$E = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{a^2}{\mu}, \quad \text{Ra} = \frac{g \beta a^4 A}{\alpha \mu}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu}{\alpha \rho}. \quad (3.1.23)$$

На відміну від Тао (1960) [68], ми включили безрозмірний параметр E в визначення безрозмірної швидкості та температури. Використовуючи ці визначення, рівняння (3.1.16) та (3.1.17) можна представити у вигляді

$$\frac{d^2 U}{dY^2} + \text{Ra} \Theta = -1 \quad (3.1.24)$$

$$\frac{d^2 \Theta}{dY^2} - U = 0. \quad (3.1.25)$$

Перетворення граничних умов (3.1.20) і (3.1.21) до безрозмірної форми привносить

$$U = \text{Kn} \frac{dU}{dY}, \quad \Theta = \frac{\text{Kn}}{\text{Pr}} \frac{d\Theta}{dY} \quad \text{при } Y = -1, \quad (3.1.26)$$

$$U = -\text{Kn} \frac{dU}{dY}, \quad \Theta = -\frac{\text{Kn}}{\text{Pr}} \frac{d\Theta}{dY} \quad \text{при } Y = 1, \quad (3.1.27)$$

де

$$\text{Kn} = \frac{\gamma L}{a}. \quad (3.1.28)$$

В теоретичній роботі Тао (1960 р.) [68], аналогічна задача була вирішена з граничними умовами без проковзування для швидкості та температури, представлені в вигляді складної функції, чия реальна і уявна частини безпосередньо пов'язані з полями швидкості та температури відповідно. На жаль, у нашому випадку такий метод може бути використаний тільки для окремого випадку $\text{Pr} = 1$. Отже, ми вирішимо систему рівнянь (3.1.24) та (3.1.25), використовуючи традиційний метод.

Беремо другу похідної від рівняння (3.1.25) по Y і отримуємо

$$\frac{d^4 \Theta}{dY^4} - \frac{d^2 U}{dY^2} = 0 \quad (3.1.29)$$

Використання рівняння (3.1.24), можна виключити швидкість з рівняння (3.1.28), тоді

$$\frac{d^4 \Theta}{dY^4} + \text{Ra} \Theta = -1 \quad (3.1.30)$$

Це досить просте рівняння можна вирішити, використовуючи характеристичне алгебраїчне рівняння четвертого порядку. Розв'язок для функції $Q(Y)$, отриманий таким чином, може далі використовуватись для отримання розподілу швидкості $U(Y)$ з рівняння (3.1.25). Нарешті, розв'язок з урахуванням граничних умов (3.1.26) та (3.1.27) наступний

$$U = 2 \text{Pr} \left(\sqrt{2} \text{Kn} \text{Ra}^{1/4} \cos \left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}} \right) \sin \left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}} \right) \sinh \left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ \left. - \sinh \left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}} \right) \right) \left(\cos \left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}} \right) \cosh \left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\sqrt{2} \text{KnRa}^{1/4} \cos\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) 2 \sin\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \right) \\
& - \cosh\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \left(\sqrt{2} \text{KnRa}^{1/4} \cos\left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}}\right) \right) \\
& \cosh\left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) - \left(2 \cos\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \right) \\
& - \sqrt{2} \text{KnRa}^{1/4} \sin\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}}\right) \\
& \times \sinh\left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}}\right) \left) / (2 \text{Kn}^2 \text{Ra} \cos(\sqrt{2} \text{Ra}^{1/4}) \right. \\
& - 2 \text{Pr} \sqrt{\text{Ra}} \cos(\sqrt{2} \text{Ra}^{1/4}) - 2(\text{Pr} \sqrt{\text{Ra}} + \text{Kn}^2 \text{Ra}) \cosh(\sqrt{2} \text{Ra}^{1/4}) \\
& \left. + \sqrt{2} \text{KnRa}^{3/4} \sin(\sqrt{2} \text{Ra}^{1/4}) - \sqrt{2} \text{Kn}(1 + \text{Pr}) \text{Ra}^{3/4} \sin(\sqrt{2} \text{Ra}^{1/4}) \right) \quad (3.1.31)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta = & -\frac{1}{2\text{Ra}} \left(2 + \left(4 \text{Pr} \left(\cosh\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}}\right) \left(2 \cos\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \right) \right. \right. \right. \\
& - \sqrt{2} \text{KnRa}^{1/4} \sin\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \left. \left. \left. \right) + \sqrt{2} \text{KnRa}^{1/4} \sin\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \right. \right. \\
& \left. \left. \times \sin\left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}}\right) \right) \right) \\
& + \sinh\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \left(\sqrt{2} \text{KnRa}^{1/4} \cos\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}}\right) \right)
\end{aligned}$$

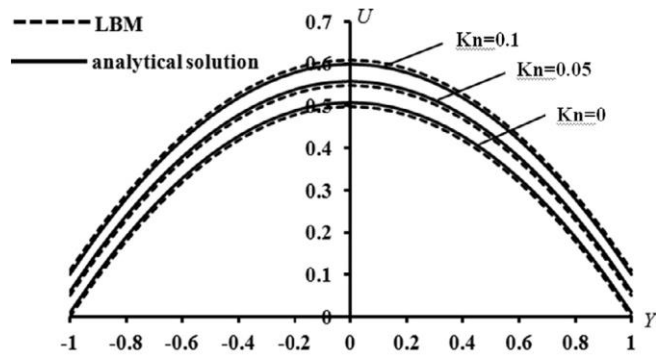
$$\begin{aligned}
& \times \cosh\left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}}\right) + \left(\sqrt{2} \text{Kn} \text{Ra}^{1/4} \cos\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(\frac{\text{Ra}^{1/4}}{\sqrt{2}}\right) \right) \\
& \times \sin\left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\text{Ra}^{1/4} Y}{\sqrt{2}}\right) \left. \right) \left. \right) \left. \right) \left. \right) / \left(-2 \text{Pr} \cos\left(\sqrt{2} \text{Ra}^{1/4}\right) \right. \\
& + 2 \text{Kn}^2 \sqrt{\text{Ra}} \cos\left(\sqrt{2} \text{Ra}^{1/4}\right) - 2(\text{Pr} + \text{Kn}^2 \sqrt{\text{Ra}}) \cos\left(\sqrt{2} \text{Ra}^{1/4}\right) \\
& + 2 \text{Kn} \text{Ra}^{1/4} \sin\left(\sqrt{2} \text{Ra}^{1/4}\right) - \sqrt{2} \text{Kn} \text{Pr} \text{Ra}^{1/4} \sin\left(\sqrt{2} \text{Ra}^{1/4}\right) \\
& \left. - \sqrt{2} \text{Kn} (1 + \text{Pr}) \text{Ra}^{1/4} \sinh\left(\sqrt{2} \text{Ra}^{1/4}\right) \right) \tag{3.1.32}
\end{aligned}$$

В частинному випадку $\text{Kn}=0$, рівняння (3.1.31) та (3.1.32) зводяться до відповідних рішень, представлених у роботі Тао [68].

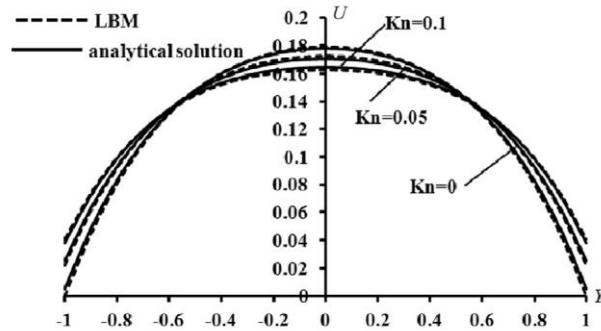
Профілі швидкості в вертикальному мікроканалі наведені на рисунку 3.1.2 для різних чисел Кнудсена. Ці профілі являються результатом аналітичного рішення, рівняння (3.1.31), та чисельного моделювання за допомогою LBM.

На рисунку 3.1.2 зазначено, що між аналітичними та чисельним рішеннями незначна різниця, менше 1%. Як видно з рис. 3.1.2а, б, с, збільшення числа Кнудсена означає збільшення швидкості проковзування (стрибок швидкості) на стінці для чисел Релея 0.01, 10 та 100. Проте, форма профілю швидкості в центральній частині каналу залежить не тільки від числа Кнудсена, але і від числа Релея.

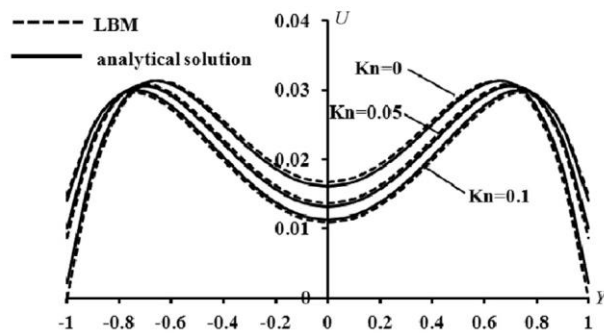
Для відносно невеликого числа Релея $\text{Ra} = 0.01$ (рис. 3.1.2а) локальні швидкості потоку в поперечному перерізі каналу (включаючи максимальну швидкість на осі каналу) зростають разом з числом Кнудсена. В результаті середня швидкість течії також зростає. Фізична причина цього явища полягає у зменшенні повного гідравлічного опору каналу.



(a)



(b)



(c)

Рис. 3.1.2 Профілі швидкості в вертикальному мікроканалі для різних чисел Кнудсена: а) $Ra = 0.01$, б) $Ra = 10$. в) $Ra = 100$. Тут $Re = 200$.

Для більшого числа Релея $Ra = 10$ (рис. 3.1.2б) швидкості потоку біля стінки збільшуються разом з числом Кнудсена. Проте, поблизу центру каналу тенденція стає зворотною: локальні швидкості потоку в поперечному перерізі каналу разом з максимальною швидкістю на осі каналу зменшуються зі збільшенням числа Кнудсена. Іншими словами, тут максимальні швидкості спостерігаються для потоку без проковзування, тобто при $Kn = 0$.

Для найбільшого числа Релея $Ra = 100$, показаного на рис. 3.1.2с, профіль швидкості стає М-подібним, що має точку мінімуму (тобто екстремум функції) на осі каналу. У цьому випадку переважає вплив природної конвекції, що призводить до появи двох локальних максимумів профілю швидкості на відстані $(0.2..0.4)a$ від нагрітих стінок. Максимуми викликані сильними висхідними потоками природної конвекції.

Число Релея сильно впливає на форму профілів швидкості у поперечному перерізі каналу. На рис. 3.1.2 та 3.1.3 показано, що збільшення числа Релея зменшує всі величини локальних швидкостей потоку в центральному районі каналу. На рис.3.1.3 зображені профілі відносної швидкості $\frac{U}{U_m}$ для постійного числа Кнудсена $Kn = 0.1$ та різних числах Релея $Ra = 0, 0.01, 1, 10$ і 100 . Тут U_m - середня осьова безрозмірна швидкість

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 U dY. \quad (3.1.33)$$

На рисунку 3.1.3 представлені лише результати LBM моделювання, відхилення яких від аналітичних даних виявилось незначним. Можна спостерігати сильне прискорення потоку поблизу стінки, викликане вільним конвекційним потоком. У той же час, вимога постійності витрати маси у поперечному перерізі каналу призводить до зменшення швидкості поблизу центра каналу, так що профіль швидкості стає М-подібним. На рисунку 3.1.3 видно що збільшення числа Релея призводить до збільшення стрибка швидкості на стінці, що, в свою чергу, можна пояснити прискоренням локального потоку біля стінки як через посилення сили Архімеда і ослаблення взаємодії потоку і стінки при $Kn > 0$. Можна також вказати на цікаву особливість профілів швидкостей на рис. 3.1.3: всі профілі перетинаються в двох точках $Y = \pm 0.5$ для різних значень числа Релея.

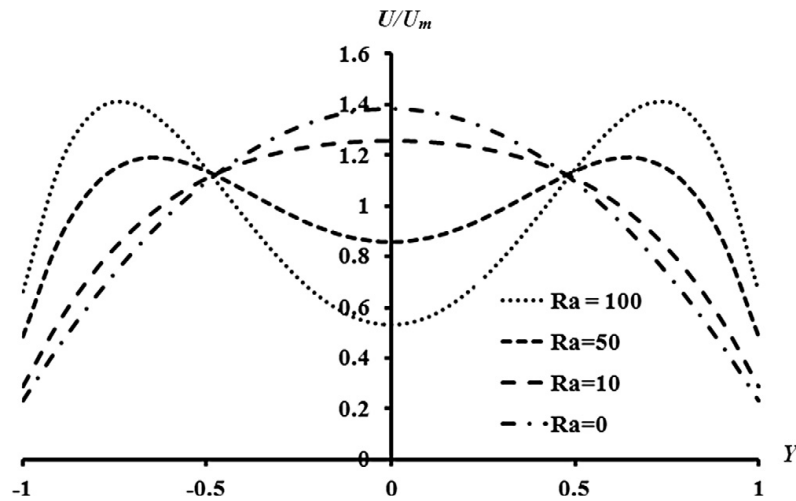
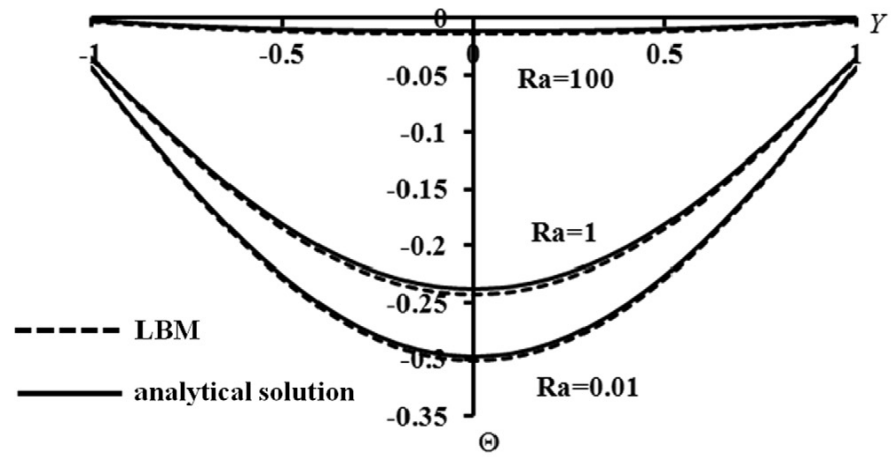


Рис. 3.1.3. Профілі швидкості у вертикальному мікроканалі для різних чисел Релея при $Kn = 0.1$. Тут $Re = 200$.

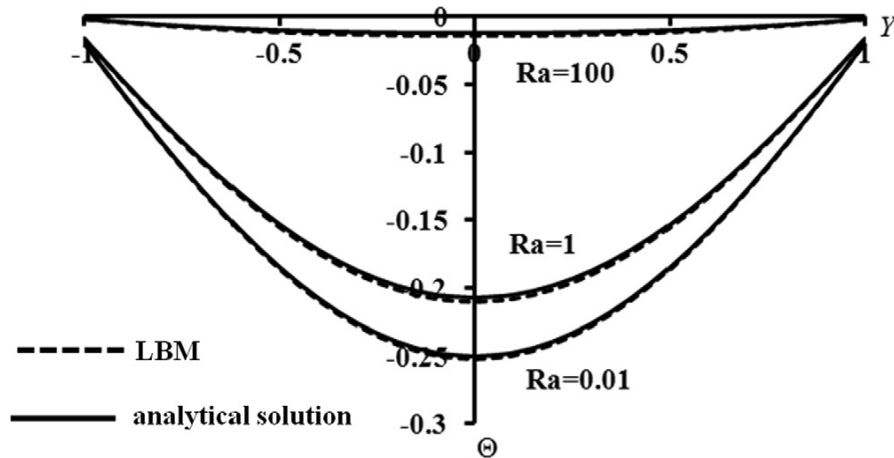
Результати LBM моделювання, зображені на рисунках 3.1.2 та 3.1.3, були отримані для $Re = 200$ (для більш детальної інформації див дискусія щодо гідравлічного опору нижче). Проте форма профілю швидкості є самоподібною відносно числа Рейнольдса (тобто не залежить від нього), через безрозмірне представлення швидкості відповідно до рівняння (3.1.22).

Обчислення також показали, що число Прандтля не впливає на профілі швидкості для всіх значень числа Релея та Прандтля, що були використані у дослідженнях.

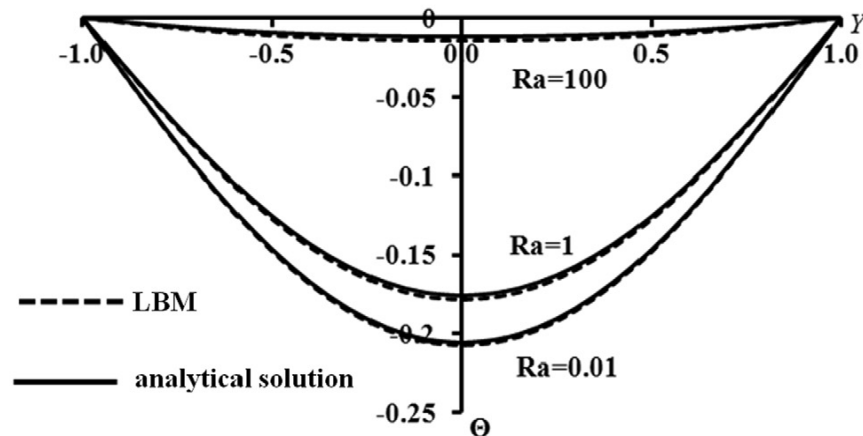
Вплив різних значень числа Кнудсена та Релея на температурні профілі при $Pr = 1$ більш детально відображено на рис. 3.1.4a, b, c. Для всіх чисел Кнудсена $Kn = 0, 0.05$ і 0.1 , збільшення числа Релея викликає згладжування температурних профілів. Іншими словами, як вже було сказано вище, локальна температура рідини в поперечному перерізі каналу прямує до температури стінки. Крім того, на відміну від профілів швидкості, для більших чисел Релея стрибок температури на стінці також зменшується. Ця тенденція стосується всіх чисел Кнудсена, вивчених у даній роботі.



(a)



(b)



(c)

Рис. 3.1.4. Температурні профілі у вертикальному мікроканалі для різних чисел Релея при $Pr = 1$. а) $Kn = 0.1$, б) $Kn = 0.05$, в) $Kn = 0$.

Як видно з рисунка 3.1.5, збільшення числа Кнудсена викликає більші стрибки температури на стінці.

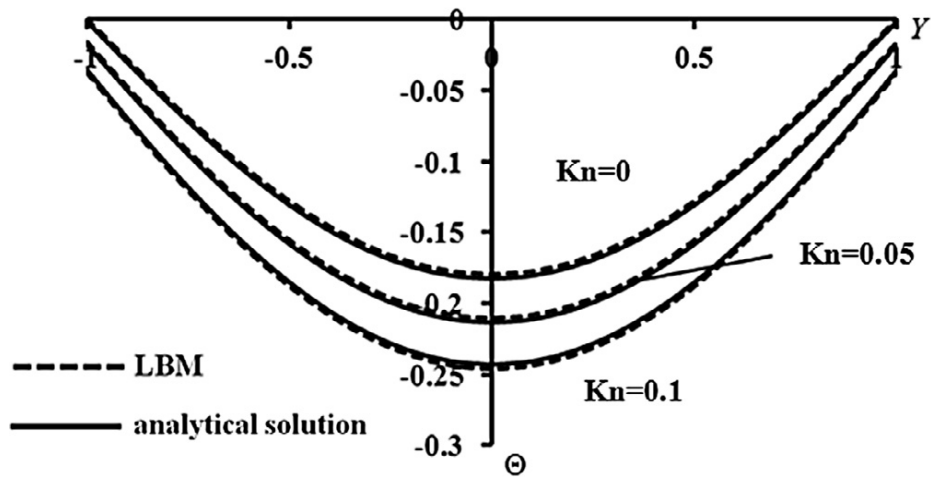


Рис. 3.1.5. Температурні профілі у вертикальному мікроканалі для різних чисел Кнудсена. $Pr = 1$ і $Ra = 1$.

Величина стрибка температури на стіну залежить від числа Прандтля, див. рис 3.1.6. На цьому рисунку не містяться дані LBM моделювання, оскільки вони практично збігаються з аналітичним рішенням. Для вищих значень числа Прандтля стрибок температури на стінці слабшає, що впливає з граничних умов (3.1.27). Це ослаблення стрибка температури нелінійне. Для чисел Прандтля $Pr > 5$ величина стрибка температури залишається практично незмінною.

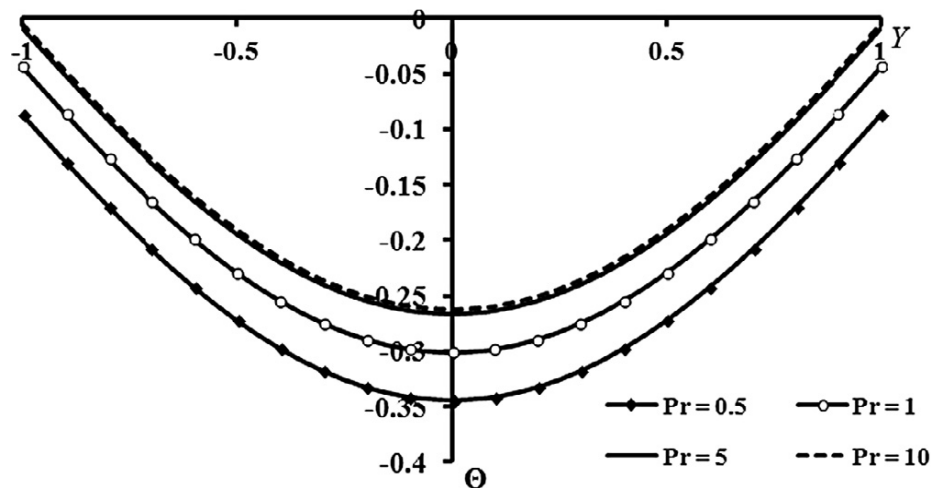


Рис. 3.1.6. Профілі температури у вертикальному мікроканалі для різних чисел Прандтля, $Kn = 0.1$ і $Ra = 0.01$.

На рис.3.1.7 зображені профілі температури у реальному мікроканалі, який служить частиною системи охолодження, що використовується в

електронному обладнанні, для якого необхідно підтримувати рівень температури 70-80 °С. Ці числові дані були отримані, використовуючи метод ЛВМ. Як і очікувалося, збільшення числа Релея призводить до зменшення неоднорідності температурного профілю. Як можна з'ясувати, величина неоднорідності температури по поперечному перерізі каналу, а також сам рівень температури є дуже незначними. Це дозволяє знехтувати тепловим випромінюванням.

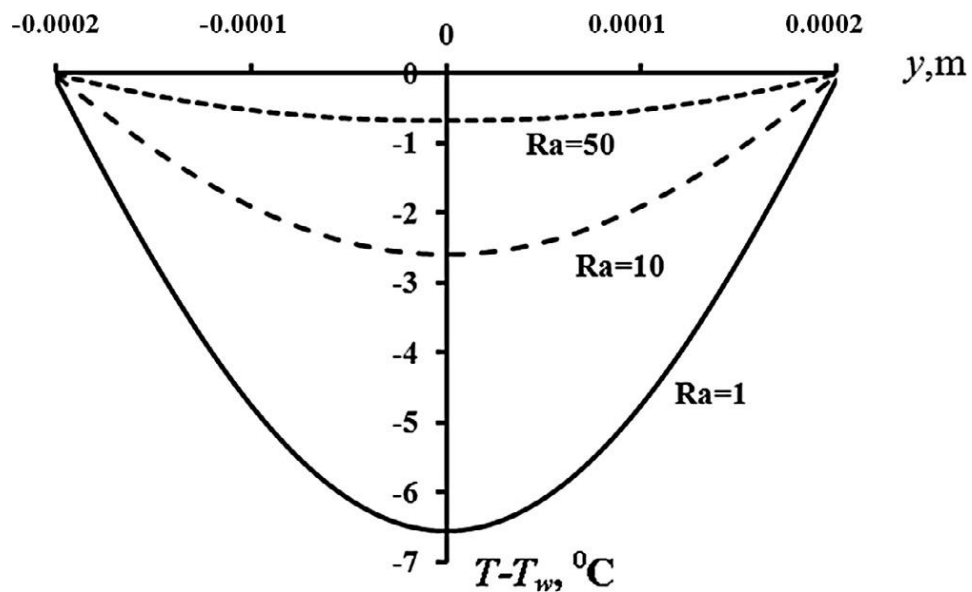


Рис. 3.1.7. Профілі температури в реальному вертикальному мікроканалі системи охолодження, $Kn = 0.1$, $Pr = 0.7$, $Re = 200$, $a = 0,2$ мм.

Локальний тепловий потік на стіні можна записати як

$$q_w = \frac{Gc_p}{\Pi} \frac{\partial T}{\partial x}. \quad (3.1.34)$$

Враховуючи лінійний розподіл (3.1.18), з рівняння (3.1.33) можна вивести

$$\frac{q_w a}{(T_m - T_w) \alpha c_p \rho} = \frac{Au_m a^2}{\alpha (T_m - T_w)}, \quad (3.1.35)$$

де

$$u_m = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a u dy \quad (3.1.36)$$

$$T_m = \frac{\int_{-a}^a Tudy}{\int_{-a}^a udy}. \quad (3.1.37)$$

являються середньою осьовою швидкістю і змішана середня температура. Рівняння (3.1.35) можна представити у виді

$$Nu = \frac{4}{\Theta_m} \quad (3.1.38)$$

де

$$Nu = \frac{q_w 4a}{(T_m - T_w) \alpha c_p \rho} \quad (3.1.39)$$

являється числом Нуссельта і

$$\Theta_m = \frac{\int_{-1}^1 \Theta U dY}{\int_{-1}^1 U dY} \quad (3.1.40)$$

являється змішаною безрозмірною середньою різницею температури.

Використовуючи аналітичний розв'язок для розподілу температури (3.1.31) та визначення, наведені у рівняннях (3.1.37) та (3.1.39) можна оцінити число Нуссельта для випадку чистої вимушеної конвекції ($Ra = 0$) без проковзування ($Kn = 0$).

$$Nu_{00} = 8.235. \quad (3.1.41)$$

Тут нижній індекс "00" означає, що число Нуссельта відноситься до випадку $Ra = Kn = 0$. Значення числа Нуссельта Nu_{00} , отриманого з чисельного методу LBM, дорівнює $Nu_{00} = 8.16$. Щоб порівняти ці результати зі значеннями числа Нуссельта Nu_{00} , доступних в літературі, можна посилатися на підручник [72] щодо теплообміну. Як слідує з таблиці 8-1, сторінка 437 [72],

$Nu_{00} = 8.24$ для граничної умови $q_w = const$ для каналу зображена на рис. 3.1.1, яка дуже добре узгоджується зі значенням $Nu_{00} = 8.235$ відповідно до рівняння (3.1.27).

Щоб проаналізувати безпосередньо вплив числа Релея (тобто випадку, коли $Kn = 0$) на передачу тепла, число Нуссельта для цих умов описується наступним чином

$$Nu_0 = Nu_{00}(1 + 0.1923Ra). \quad (3.1.42)$$

Іншими словами, рівняння (3.1.41) описує вплив природної конвекції на теплопередачу в потоці без проковзування при $Kn = 0$. Рівняння (3.1.41) справедливе в діапазоні $Ra = 0 \dots 100$.

На рис. 3.1.8 показано вплив чисел Релея, Кнудсена та Прандтля на відносне число Нуссельта

$$\overline{Nu} = \frac{Nu}{Nu_0}. \quad (3.1.43)$$

Як видно з рис. 3.1.8, вплив безрозмірних чисел Ra , Kn і Pr на число Нуссельта розпадається на два різних випадки. Для всіх комбінацій чисел Ra , Kn і Pr , за винятком випадку $Pr = 10$ і $Ra = 100$ (рис. 3.1.8 с), збільшення числа Кнудсена зменшує швидкість теплопередачі. Це відбувається через збільшення стрибка температури на стінці, що, в свою чергу, призводить до погіршення умов теплової взаємодії між потоком і стінкою.

Для окремих випадків, коли $Pr = 10$ і $Ra = 100$ (рис. 3.1.8с) збільшення чисел Прандтля і Релея послаблює вплив проковзування. Як вже було сказано, при збільшенні числа Прандтля стрибок температури на стінки зменшується. Для дуже великих значень числа Прандтля стрибок температури на стіні практично вироджується. Збільшення числа Релея супроводжується збільшенням швидкості біля стінки, що викликає збільшення теплопередачі. З цієї причини тепла взаємодія в цьому випадку практично не залежить від

проковзування, а швидкість біля стінки набагато вище, ніж для $Kn = 0$. Ці два чинники викликають збільшення відносного числа Нуссельта.

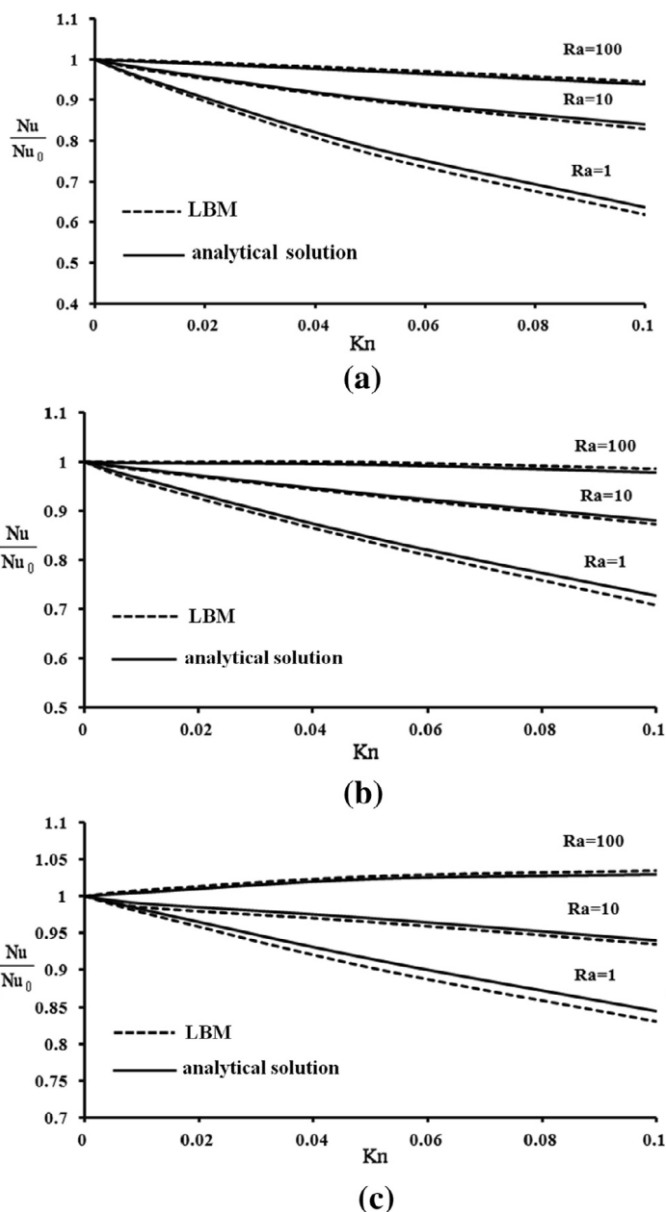


Рис 3.1.8. Залежність відносного числа Нуссельта від чисел Релея та Кнудсена: а) $Pr = 0.5$; б) $Pr = 1$; в) $Pr = 10$.

Слід також зазначити, що найменша зміна відносного числа Нуссельта, рівняння (3.1.43), спостерігається при високих значеннях числа Релея. Це пов'язано з тим, що для високих чисел Релея число Нуссельта відповідно до рівняння (3.1.42) набуває високих значення і, як правило, змінюється досить незначно.

Окрім параметрів теплопередачі, також було досліджено гідравлічний опір. Гідравлічний опір описується рівнянням Дарсі-Вейсбаха

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \lambda \frac{\rho u_m^2}{2D_e} \quad (3.1.44)$$

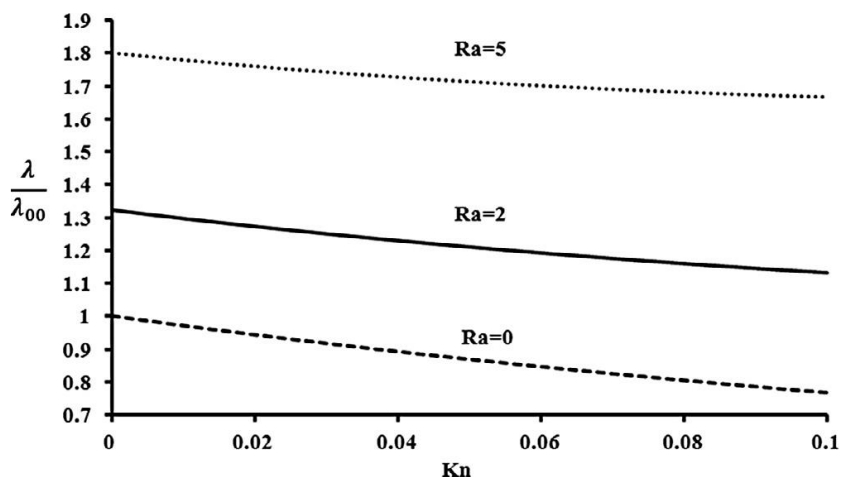


Рис. 3.1.9. Залежність відносного коефіцієнта тертя як функція чисел Релея та Кнудсена.

На рис. 3.1.9 показана залежність відносного коефіцієнта тертя λ/λ_{00} від чисел Кнудсена та Релея, отриманих за допомогою методу ґрат Больцмана. Тут

$$\lambda_{00} = \frac{96}{Re}, \quad (3.1.45)$$

де нижній індекс "00" означає, що $Ra = Kn = 0$ (за аналогією з числом Нуссельта Nu_{00}), і

$$Re = \frac{u_m \rho d}{\mu} \quad (3.1.46)$$

Як видно з рис. 3.1.9, для випадку низьких чисел Релея, збільшення числа Кнудсена (тобто збільшення ефекту проковзування) зменшується гідравлічний опір. Проте для більших чисел Релея нахил кривих на рис. 3.1.9 зменшується, що означає ослаблення ефекту проковзування. Цей ефект особливо добре видно

на рис 3.1.10 при $Ra \leq 10$. На цьому рисунку параметр λ_0 також враховує вплив природної конвекції (як у випадку з числом Нуссельта Nu_0).

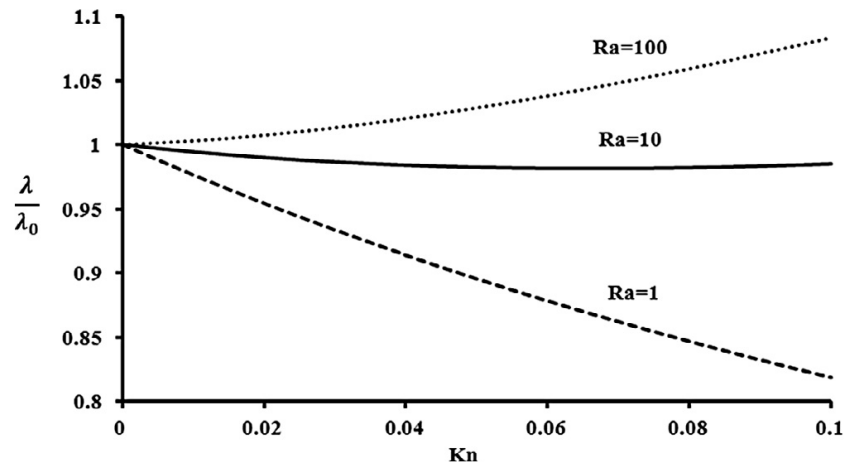


Рис. 3.1.10. Відносний коефіцієнт тертя як функція числа Кнудсена для різних чисел Релея.

Як видно з рис. 3.1.10, починаючи з деяких значень числа Релея, збільшення числа Кнудсена призводить до збільшення гідравлічного опору. Наприклад, це можна спостерігати для $Kn > 0.065$ і $Ra \sim 10$. У випадку більших чисел Релея, таких як $Ra = 100$, гідравлічний опір швидко зростає при збільшенням числа Кнудсена $Kn \geq 0$. Ця тенденція аналогічна поведінці відносного числа Нуссельта при високих значеннях чисел Релея та Прандтля і обумовлено тим, що збільшення числа Релея призводить до збільшення градієнта швидкості на стінці (рис. 3.1.3). При великих значень числа Кнудсена збільшення градієнта швидкості на стінці посилюється по причині слабкої взаємодії потоку та стінки.

Моделювання потоку рідини та теплопередачі показало адекватність застосування методу ґрат Больцмана для моделювання змішаної конвекції в мікроканалах. Отже, можна зробити висновок, що метод ґрат Больцмана може використовуватися для моделювання змішаної конвекції у складних геометріях, де аналітичні методи не можна застосувати.

3.2 Змішана конвекція в вертикальному циліндричному мікроканалі

Ми будемо моделювати повністю розвинений двох вимірний ламінарний потік, який піддається впливу змішаної конвекції. Геометрія задачі представлена вертикальним циліндричним каналом, показаним на Рис. 3.2.1, в якому вимушений конвективний потік спрямований вгору.

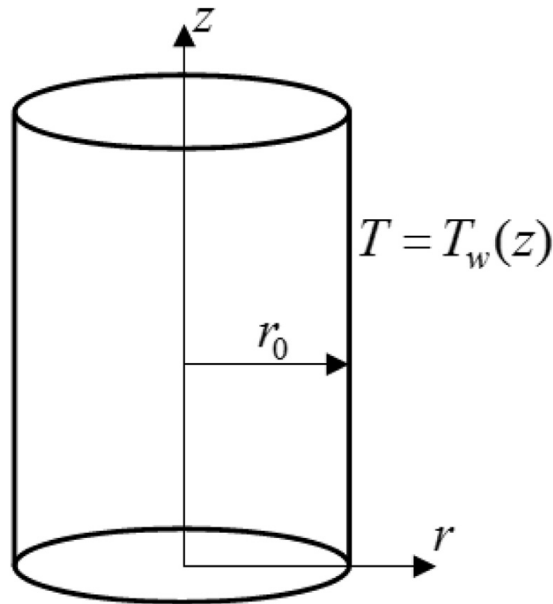


Рис. 3.2.1. Схематичне зображення геометрії потоку.

В роботі [73], на основі якої було написано даний підрозділ, використано три вимірну гратчасту модель $D3Q15$ (рис. 2.3.2) з п'ятнадцятьма напрямками швидкостей.

Макропараметри змодельованої системи в даному випадку визначаються наступним чином

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_j f_j, \\ \rho u &= \sum_j c_j f_j, \\ p &= \frac{1}{3} \sum_j (c_j - u)^2 f_j,\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

$$\rho\varepsilon = \sum_j f_{T,j}$$

де

$$c = c_j \sqrt{3R_g T}, \quad (3.2.2)$$

це молекулярна швидкість, R_g - універсальна газова стала,

$$\varepsilon = \frac{3}{2} R_g T \quad (3.2.3)$$

це внутрішня енергія.

Рівноважний розподіл молекул визначається за допомогою формули (2.3.29). Ми застосували підхід, запропонований у роботі [74] для моделювання нестисливого потоку в мікроканалі з перепадом тиску. Це було зроблено з використанням концепції псевдо нестисливої рідини за допомогою введення густини вузла (2.3.34). Зовнішня сила визначається за допомогою рівняння (2.3.36).

Рівноважний розподіл енергії задається рівнянням

$$f_{T,j}^e = \begin{cases} -\frac{\rho R T u^2}{2c^2}, & j=0, \\ \frac{\rho R T}{6} \left[1 + \frac{e_j \cdot u}{c^2} + \frac{9(e_j \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right], & j=1, \dots, 6, \\ \frac{\rho R T}{48} \left[3 + \frac{7(e_j \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_j \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right], & j=7, \dots, 14 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

При моделюванні мікропотоків час релаксації визначається за допомогою числа Кнудсена, але без врахування в'язкості рідини. Число Кнудсена та безрозмірний час релаксації пов'язані за такими виразами [р3.п1.6]

$$\tau = \text{Kn} N_n + \frac{1}{2}$$

$$\tau_T = \frac{Kn}{Pr} N_n + \frac{1}{2} \quad (3.2.5)$$

де N_n - кількість елементів у стовпці ґратки вздовж каналу. Швидкість ковзання на стіні визначається за формулою

$$u_w = u'_n \frac{KnN_n}{(1 + KnN_n)} \quad (3.2.6)$$

де u'_n - швидкість потоку в комірці біля стінки.

Макропараметри граничних умов повинні бути пов'язані з мікропараметрами функції розподілу. Нагадуємо, що в нашій моделі використовуються наступні граничні умови: швидкість проковзування на стінці та періодичні межові умови для входу / виходу.

Періодичні межові умови встановлюються в напрямку потоку шляхом обробки вхідних / вихідних комірок як безпосередніх сусідів. Таким чином, встановлення періодичних умов стає частиною етапу потокової передачі, тоді як комутуючі розподіли на виході ґратки передаються на вхід в якості заданих граничних умов. Таким чином виконується принцип збереження маси.

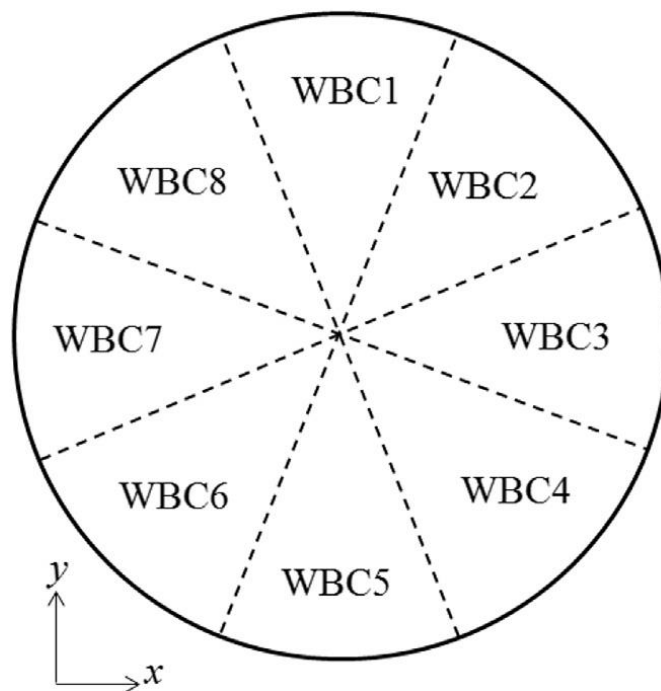


рис. 3.2.2 Групи граничних умов на стінці

Граничні умови на стінці визначаються в залежності від кута між напрямком нормалі на стінці та віссю y , визначеного за годинниковою стрілкою. Враховуючи дискретні напрямки руху всередині ґратки, на стіні можна визначити 8 груп граничних умов (рис. 3.2.2).

Таблиця 1

Групи границь та відповідні невідомі функції розподілу.

Групи границь	Невідомі функції розподілу
WBC1	$f_4, f_8, f_{10}, f_{11}, f_{13}, f_{T,4}, f_{T,8}, f_{T,10}, f_{T,11}, f_{T,13}$
WBC2	$f_4, f_6, f_8, f_{10}, f_{T,4}, f_{T,6}, f_{T,8}, f_{T,10}$
WBC3	$f_2, f_8, f_{10}, f_{12}, f_{14}, f_{T,4}, f_{T,2}, f_{T,8}, f_{T,10}, f_{T,12}, f_{T,14}$
WBC4	$f_2, f_3, f_{12}, f_{14}, f_{T,2}, f_{T,3}, f_{T,12}, f_{T,14}$
WBC5	$f_3, f_7, f_9, f_{12}, f_{14}, f_{T,3}, f_{T,7}, f_{T,12}, f_{T,14}$
WBC6	$f_1, f_3, f_7, f_9, f_{T,1}, f_{T,3}, f_{T,7}, f_{T,9}$
WBC7	$f_1, f_7, f_9, f_{11}, f_{13}, f_{T,1}, f_{T,7}, f_{T,9}, f_{T,11}, f_{T,13}$
WBC8	$f_1, f_4, f_{11}, f_{13}, f_{T,1}, f_{T,4}, f_{T,9}, f_{T,11}, f_{T,13}$

В якості приклад, нижче приведені рівняння для розрахунку невідомих функцій розподілу молекулярної густини для групи WBC1

$$f_4 = f_3,$$

$$f_8 = f_{14} + \frac{1}{2}(f_6 - f_5 - 2f_7) + f_9,$$

$$f_{10} = \frac{1}{2}[f_1 - 2f_{14} - f_2 + f_5 - f_6 + 4f_7 - u_w(f_0 + f_1 + f_2 + 2f_3 + f_5$$

$$+ f_6 + 2f_{12} + 2f_{14} + 2(f_7 + f_9)],$$

$$f_{11} = f_7,$$

$$f_{13} = \frac{1}{2}[-f_1 + 2f_{12} + f_{14} + f_2 - 2f_7 + u_w(f_0 + f_1 + 2f_{12} + 2f_{14} + f_2 + 2f_3 + f_5 + f_6 + 2(f_7 + f_9))] \quad (3.2.7)$$

Невідомі функції розподілу густини енергії розраховуються за рівнянням

$$f_{T,i} = f_{T,i}^e + w_i K_c \quad (3.2.8)$$

де K_c - коефіцієнт поправки для обчислення внутрішньої енергії [74]. Рівняння коефіцієнта поправки K_c залежить від конкретної групи граничних умов. Наприклад, коефіцієнт поправки K_c для групи WBC1 (рис.3.2.2) має наступний вигляд

$$K_c = \frac{\rho(\varepsilon - \varepsilon^*)}{w_4 + w_8 + w_{10} + w_{11} + w_{13}}, \quad (3.2.9)$$

де

$$\varepsilon^* = \frac{\sum_j f_{T,j}^e}{\rho}. \quad (3.2.10)$$

З урахуванням того, що гранична умова Неймана для похідної $\frac{\partial T}{\partial n}$ задано на стінці (де n - безрозмірний вектор нормалі, нормований з кроком ґратки), температура стінки визначається наступним чином

$$T_w = \frac{2}{3} \frac{\partial T}{\partial n} + \frac{4}{3} T' - \frac{1}{3} T'', \quad (3.2.11)$$

де T' і T'' - це температури двох комірок, розташованих поруч зі стінкою і через одну комірку, відповідно. Тоді температура рідини на стіні дорівнює

$$T_{wf} = \frac{T'(Kn/Pr)N_n + T_w}{1 + (Kn/Pr)N_n}. \quad (3.2.12)$$

Потік у мікроканалі моделювали за допомогою ґратки D3Q.15 (рис. 2.3.2), що складалася з $40 \times 40 \times 600$ комірок. Критерій збіжності різниці між значеннями швидкості на виходу для послідовних етапів ітерації був вибраний менше 0.1%. Обчислення виконувалися у системі програмування GNU Octave, яка сумісна з MATLAB.

Головною новизною впровадження методу ґрат Больцмана для даного дослідження необхідно було застосувати тривимірну ґратку D3Q15, тоді як для плоского каналу було достатньо спрощеної двовимірної ґратки D2Q9 [66]. Враховуючи необхідність представити циліндр в вигляді прямокутної ґратки, процедура визначення граничних умов з проковзуванням на стінках каналу стала суттєво складнішою. Це викликало необхідність розділення стінок каналу на 8 різних зон з однаковими невідомими функціями розподілу в залежності від кута дотичної відносно стіни каналу.

Для аналітичного моделювання поточної задачі були зроблені наступні припущення.

1. Потік стаціонарний; тому похідні по часу можна ігнорувати.
2. Задача повинна вивчатися при повністю розвиненому потоці рідини, що дозволяє ігнорувати інерційні члени у відповідному рівнянні Нав'є-Стокса.
3. Для врахування природної конвекції буде використовуватися підхід Буссінеска, тобто зміна щільності буде врахована лише в доданках, пов'язаними з силою Архімеда.

Визначальні рівняння, що описують цю фізичну задачу, записуються як

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.2.13)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \rho g \beta (T - T_w), \quad (3.2.14)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (3.2.15)$$

У рамках підходу, розробленого Тао (1960) [75], математична модель (3.2.13) - (3.2.15) може бути замкнена тепловою граничною умовою, що визначає постійний осьовий температурний градієнт A на стінці каналу у вертикальному z -напрямку, тобто $T_w = Az$. Іншими словами, ця гранична умова визначає постійний тепловий потік на стінці.

В даному підрозділі осьова зміна функції означатиме її зміну вздовж вертикального z -напрямку.

Поки осьовий градієнт температури стінки постійний, температура стінки змінюється лінійно в z -напрямку. Оскільки температура стінки змінюється лінійно, а профіль температури у поперечному перерізі каналу в r -напрямку для повністю розвиненого ламінарного потоку не залежить від z -координати, цей профіль температури також повинен варіюватися лінійно у вертикальному z -напрямку. Тому різниця температур

$$T(z, r) - T_w = T(z, r) - Az = \varphi(r) \quad (3.2.16)$$

являється також незалежною від z -координати.

Для розріджених потоків з урахуванням проковзування можна задати наступні граничні умови

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0, \quad (3.2.17)$$

$$u = -\gamma L \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varphi = -\frac{\gamma L}{\text{Pr}} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \text{при } r = r_0. \quad (3.2.18)$$

Граничні умови відносної температури Θ впливають із визначення стрибка температури на стінці, рівняння (3.2.19).

$$\Delta T_i \sim L \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (3.2.19)$$

Введемо наступні безрозмірні параметри та функції

$$r = \frac{r}{r_0}, \quad U = \frac{u}{E}, \quad \Theta = \frac{\alpha \varphi}{A r_0^2 E}, \quad (3.2.20)$$

$$E = \left(-\frac{dp}{dx} \right) \frac{r_0^2}{\mu}, \quad \text{Ra} = \frac{g \beta \rho r_0^2 A}{\alpha \mu}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu}{\alpha \rho}. \quad (3.2.21)$$

Всупереч Тао (1960) [75], безрозмірний параметр E тут фігурує при визначенні безрозмірної швидкості U і температури Θ . З огляду на це, рівняння (3.2.14) і рівняння (3.2.15) можна записати наступним чином

$$\left(\frac{d^2 U}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{dU}{dR} \right) + \text{Ra} \Theta = -1, \quad (3.2.22)$$

$$\left(\frac{d^2 \Theta}{dR^2} + \frac{1}{R} \frac{d\Theta}{dR} \right) - U = 0. \quad (3.2.23)$$

Граничні умови (3.2.17) та (3.2.18) також можна звести до безрозмірної форми

$$\frac{dU}{dR} = 0, \quad \frac{d\Theta}{dR} = 0 \quad \text{при } R = 0, \quad (3.2.24)$$

$$U = -\text{Kn} \frac{dU}{dR}, \quad \Theta = -\frac{\text{Kn}}{\text{Pr}} \frac{d\Theta}{dR} = 0 \quad \text{при } R = 1, \quad (3.2.25)$$

де число Кнудсена

$$\text{Kn} = \frac{\gamma L}{r_0} \quad (3.2.26)$$

визначається за допомогою коефіцієнта в'язкого ковзання γ .

Теоретичне дослідження Тао (1960) [75] присвячено аналогічній задачі для звичайних рідин з граничними умовами без проковзування. Задача була

вирішена за допомогою комплексної функції, чий дійсна та уявні частини пов'язані з полями швидкості та температури, відповідно. На жаль, у нашому дослідженні цей підхід можна застосувати лише до спеціального випадку $Pr = 1$. З цієї причини система рівнянь (3.2.22) та (3.2.23) буде розв'язано за допомогою традиційного методу.

Виражаючи безрозмірну швидкість U через безрозмірну температуру Θ з рівняння (3.2.23) можна представити рівняння (3.2.22) наступним чином

$$\frac{d^4 \Theta}{dR^4} + 2 \frac{1}{R} \frac{d^3 \Theta}{dR^3} - \frac{1}{R^2} \frac{d^2 \Theta}{dR^2} + \frac{1}{R^3} \frac{d\Theta}{dR} + Ra\Theta = -1. \quad (3.2.27)$$

Щоб розв'язувати це рівняння, слід ввести нову змінну

$$\eta = R^4 \sqrt{Ra}. \quad (3.2.28)$$

За допомогою цієї нової змінної, рівняння (3.2.27) можна знову записати як

$$\frac{d^4 \Theta}{d\eta^4} + 2 \frac{1}{\eta} \frac{d^3 \Theta}{d\eta^3} - \frac{1}{\eta^2} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta^3} \frac{d\Theta}{d\eta} + \Theta = -\frac{1}{Ra} \quad (3.2.29)$$

Розв'язок цього неоднорідного рівняння можна знайти як суму загального розв'язку однорідного рівняння, яке відповідає неоднорідному рівнянню (3.2.29), та частковому розв'язку неоднорідного рівняння (3.2.29).

Спочатку необхідно вирішити наступне однорідне рівняння

$$\frac{d^4 \Theta}{d\eta^4} + 2 \frac{1}{\eta} \frac{d^3 \Theta}{d\eta^3} - \frac{1}{\eta^2} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta^3} \frac{d\Theta}{d\eta} + \Theta = 0, \quad (3.2.30)$$

яке впливає з неоднорідного рівняння (3.2.29). Рівняння (3.2.30) - це частковий випадок класичного циліндричного диференціального рівняння четвертого порядку, як вказано в роботі [76]

$$\frac{d^4 \Theta}{d\eta^4} + 2 \frac{1}{\eta} \frac{d^3 \Theta}{d\eta^3} - \frac{1+2m^2}{\eta^2} \frac{d^2 \Theta}{d\eta^2} + \frac{1+2m^2}{\eta^3} \frac{d\Theta}{d\eta}$$

$$+\left(1+\frac{m^4-4m^2}{\eta^4}\right)\Theta=0, \quad (3.2.31)$$

Загальний розв'язок рівняння (3.2.31) наступне

$$\Theta = C_1 \text{ber}_m(\eta) + C_2 \text{bei}_m(\eta) + C_3 \text{ker}_m(\eta) + C_4 \text{kei}_m(\eta), \quad (3.2.32)$$

де ber_m , bei_m - функції Кельвіна m -порядку першого роду, а ker_m , kei_m - функції Кельвіна m -порядку другого роду, тоді як C_1 , C_2 , C_3 , C_4 є константами інтегрування. Прирівнявши ліві частини рівняння (3.2.31) та (3.2.32) отримуємо загальний розв'язок рівняння (3.2.31)

$$\Theta_h = C_1 \text{ber}(\eta) + C_2 \text{bei}(\eta) + C_3 \text{ker}(\eta) + C_4 \text{kei}(\eta), \quad (3.2.33)$$

де ber , bei , ker , kei - це функції Кельвіна нульового порядку.

Тепер потрібно знайти часткове рішення неоднорідного рівняння (3.2.29). Легко помітити, що це рішення має наступний вигляд

$$\Theta_{inh} = -\frac{1}{\text{Ra}}. \quad (3.2.34)$$

Нарешті, загальний розв'язок рівняння (3.2.29) виглядає так

$$\begin{aligned} \Theta &= \Theta_h + \Theta_{inh} \\ &= C_1 \text{ber}(\eta) + C_2 \text{bei}(\eta) + C_3 \text{ker}(\eta) + C_4 \text{kei}(\eta) - \frac{1}{\text{Ra}}. \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Функції Кельвіна другого роду ker та kei проявляють сингулярність в точці $\eta=0$. Тому константи C_3 і C_4 повинні бути рівними нулю: $C_3 = C_4 = 0$. З огляду на це, рівняння (3.2.35) можна спростити

$$\Theta = \Theta_h + \Theta_{inh} = C_1 \text{ber}(\eta) + C_2 \text{bei}(\eta) - \frac{1}{\text{Ra}}. \quad (3.2.36)$$

Тоді, підставляючи рівняння (3.2.36) в рівняння (3.2.23) можна виразити безрозмірну швидкість U наступним чином

$$U = \sqrt{Ra}(C_2 \text{ber}(\eta) - C_1 \text{bei}(\eta)). \quad (3.2.37)$$

Граничні умови (3.2.24) виконуються автоматично. Таким чином, щоб знайти константи інтегрування C_1 та C_2 , ми повинні використати граничні умови (3.2.25). Застосувавши їх, можна записати кінцеві співвідношення для безрозмірної швидкості U і температури Θ

$$\begin{aligned} U = & \text{Pr} \left(\text{ber}(Ra^{1/4}) \left(2\text{bei}(Ra^{1/4}) - \sqrt{2}KnRa^{1/4} (\text{ber}_1(Ra^{1/4}) - \text{bei}_1(Ra^{1/4})) \right) \right. \\ & \left. - \text{bei}(Ra^{1/4}) \left(2\text{ber}(Ra^{1/4}) + \sqrt{2}KnRa^{1/4} (\text{ber}_1(Ra^{1/4}) + \text{bei}_1(Ra^{1/4})) \right) \right) \\ & / \left(\sqrt{Ra} \left(2\text{Pr}(\text{ber}^2(Ra^{1/4}) + \text{bei}^2(Ra^{1/4})) + 2Kn^2 \sqrt{Ra} (\text{ber}_1^2(Ra^{1/4}) + \text{bei}_1^2(Ra^{1/4})) \right) \right. \\ & \left. + \sqrt{2}Kn(1 + \text{Pr})Ra^{1/4} (\text{bei}(Ra^{1/4}) (\text{bei}_1(Ra^{1/4}) - \text{ber}_1(Ra^{1/4})) \right. \\ & \left. + \text{ber}(Ra^{1/4}) (\text{ber}_1(Ra^{1/4}) + \text{bei}_1(Ra^{1/4}))) \right), \quad (3.2.38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{1}{Ra} + \left(\frac{\text{Pr}}{Ra} \left(\text{bei}(Ra^{1/4}) \left(2\text{ber}(Ra^{1/4}) + \sqrt{2}KnRa^{1/4} (\text{bei}_1(Ra^{1/4}) - \text{ber}_1(Ra^{1/4})) \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \text{ber}(Ra^{1/4}) \left(2\text{bei}(Ra^{1/4}) + \sqrt{2}KnRa^{1/4} (\text{ber}_1(Ra^{1/4}) + \text{bei}_1(Ra^{1/4})) \right) \right) \right) \\ & / \left(2\text{Pr}(\text{ber}^2(Ra^{1/4}) + \text{bei}^2(Ra^{1/4})) + \sqrt{2}Kn(1 + \text{Pr})Ra^{1/4} (\text{bei}(Ra^{1/4}) \right. \\ & \left. \times (\text{bei}_1(Ra^{1/4}) - \text{ber}_1(Ra^{1/4})) + \text{ber}_1[Ra^{1/4}] (\text{bei}_1(Ra^{1/4}) - \text{ber}_1(Ra^{1/4})) \right) \\ & \left. + 2Kn^2 \sqrt{Ra} (\text{bei}_1^2(Ra^{1/4}) + \text{ber}_1^2(Ra^{1/4})) \right). \quad (3.2.39) \end{aligned}$$

В частковому випадку $Kn = 0$, рівняння (3.2.38) і (3.2.39) зменшуються до відповідні рішення, опублікованих в роботі Тао [75].

Профілі швидкості в вертикальному круговому мікроканалі зображені на рис. 3.2.3 для різних чисел Кнудсена. Ці профілі були отримані з аналітичного рішення рівняння (3.2.39) (суцільні лінії) і порівняння з чисельним моделюванням, використовуючи ЛВМ (пунктирні лінії).

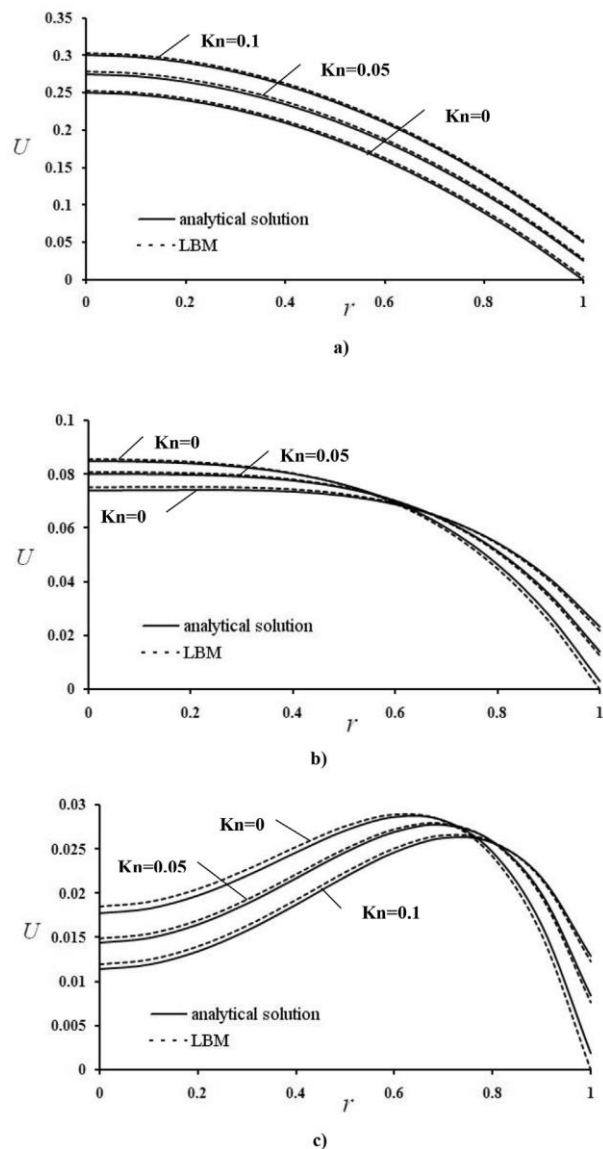


Рис. 3.2.3. Профілі швидкості в вертикальному циліндричному мікроканалі для різних чисел Кнудсена: а) $Ra = 0.001$; б) $Ra = 50$; в) $Ra = 200$.

З рис. 3.2.3 видно, що різниця між аналітичними та чисельними рішеннями становить менше 1%. На рисунках 3.2.3а, б, в також показано, що збільшення числа Кнудсена призводить до збільшення швидкості проковзування (стрибка швидкості) на стінці для чисел Релея в діапазоні від 0.001 до 200.

Проте форма профілю швидкості біля центру каналу залежить від впливу не тільки числа Кнудсена, а й числа Релея. Для відносно невеликого числа Релея $Ra = 0.001$ (рис. 3.2.3а) локальна швидкість потоку в кожному вузлі каналу (включаючи максимальну швидкість на осі каналу), а також середня швидкість

поток зростає разом з числом Кнудсена внаслідок зменшення загального гідравлічного опору каналу.

Для середнього значення числа Релея $Ra = 50$ (рис. 3.2.3b), швидкість потоку поблизу стінки каналу все ще збільшується разом з числом Кнудсена. В той же час у центральній частині каналу тенденція протилежна: локальні швидкості рідини в поперечному перерізі каналу, а також максимальна швидкість на осі каналу, знижується зі збільшенням числа Кнудсена. Отже найбільше значення максимальної швидкості на осі каналу спостерігається для потоку без проковзування, тобто для $Kn = 0$.

Як видно на рис. 3.2.3с, для найбільшого числа Релея, розглянутого в нашому дослідженні $Ra = 200$, профіль швидкості стає М-подібним, тоді як мінімальна точка (тобто екстремум функції швидкості) виникає на осі каналу. Це означає, що для $Ra = 200$ переважає вплив вільної конвекції, що стає причиною появи двох локальних максимумів профілю швидкості на відстані $(0.2...0.3)r_0$ від нагрітих стінок каналу завдяки сильним висхідним вільним конвективним потокам.

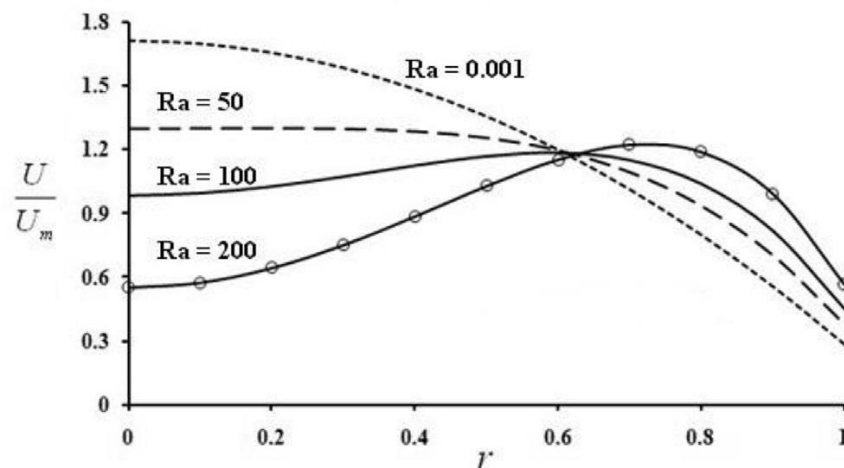


Рис. 3.2.4. Профілі швидкості у вертикальному циліндричному мікроканалі для різних чисел Релея при $Kn = 0.1$

Іншими словами, число Релея сильно впливає на форму профілів швидкості у поперечному перерізі каналу. На рисунках 3.2.3 та 3.2.4 показано,

що збільшення числа Релея зменшує загальну величину локальних швидкостей потоку поблизу осі каналу.

Профілі швидкості, нормалізовані як U/U_m , для постійного числа Кнудсена $Kn = 0.1$ та різних числах Релея $Ra = 0, 0.01, 50, 100$ і 200 зображені на рис. 3.2.4. Де U_m - середня осьова безрозмірна швидкість

$$U_m = 2 \int_0^1 URdR. \quad (3.2.40)$$

На рис. 3.2.4 представлені тільки результати LBM моделювання; їх відхилення від аналітичного розв'язку є незначним. Для $Ra = 100$ і 200 поблизу стінки каналу спостерігається сильне прискорення потоку, викликане вільним конвективним потоком. В той же час з огляду на постійність масової витрати в поперечному перерізі каналу, швидкості біля осі каналу зменшуються, а профіль швидкості стає М-подібним. Крім того, при більш високих числах Релея стрибок швидкості на стінці стає виразнішим (див. рис. 3.2.4). Це, в свою чергу, обумовлено локальним прискоренням потоку біля стінки каналу внаслідок посилення сили Архімеда, а також загальною послабленою взаємодією між рідиною та стінкою при $Kn > 0$. Також цікаво зазначити, що всі профілі швидкості на рис. 3.2.4 перетинаються у місці $R \approx 0.65$ для всіх значень числа Релея.

Розрахунки також показують, що профілі швидкості не залежать від числа Прандтля для всіх значень чисел Релея та Прандтля, що розглянуті в дослідженнях.

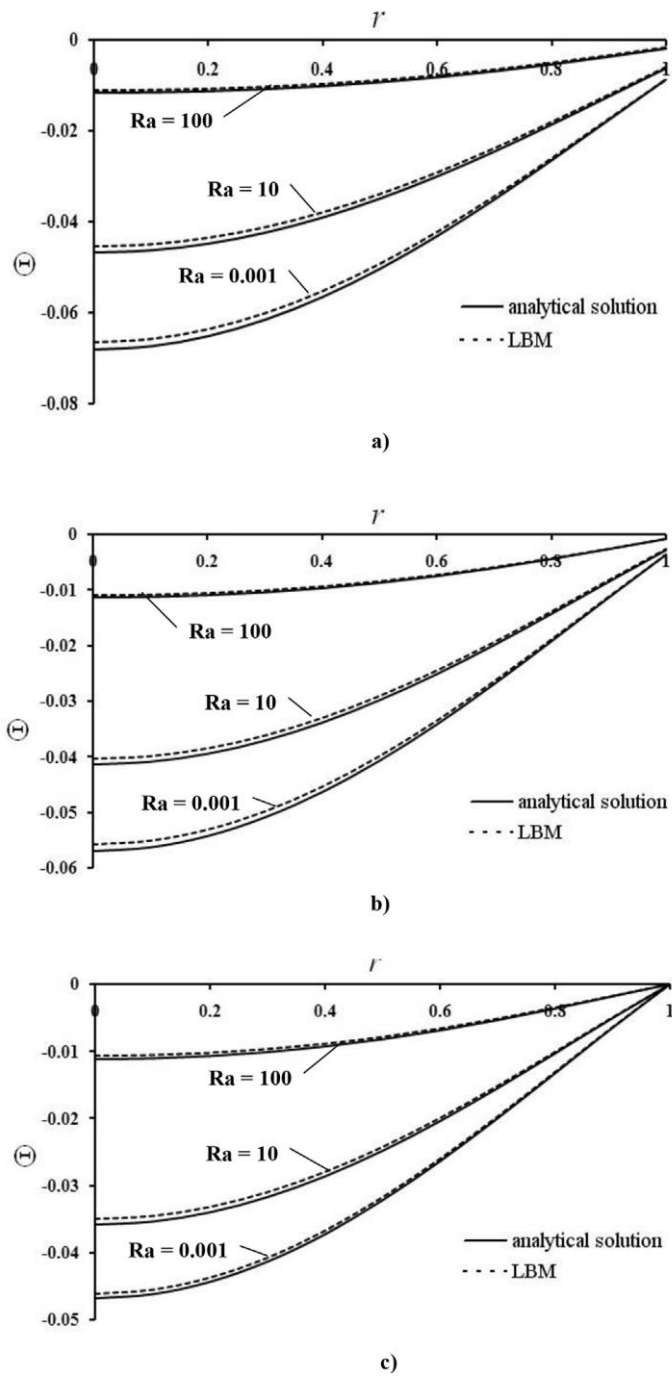


Рис. 3.2.5. Профілі температури у вертикальному циліндричному мікроканалі для різних чисел Релея при $Pr = 1$, а) $Kn = 0.1$, б) $Kn = 0.05$, в) $Kn = 0$.

На рисунку 3.2.5а, б, в показано більш докладно вплив різних чисел Кнудсена та Релея на профілі температури при $Pr = 1$. В діапазоні числа Кнудсена $Kn = 0$ до 0.1 , температурні профілі вирівнюються внаслідок збільшення числа Релея. Як вже було сказано вище, це означає, що температури рідини в поперечному перерізі каналу наближається до локальної температури стінки. У той же час, на відміну від профілів швидкості, для більших чисел

Релея стрибок температури на стінці також зменшується. Ця тенденція зберігається для всіх чисел Кнудсена, які розглянуті у поточному дослідженні.

У той же час, як видно з рисунка 3.2.6, збільшені числа Кнудсена супроводжуються більшими стрибками температури на стіні.

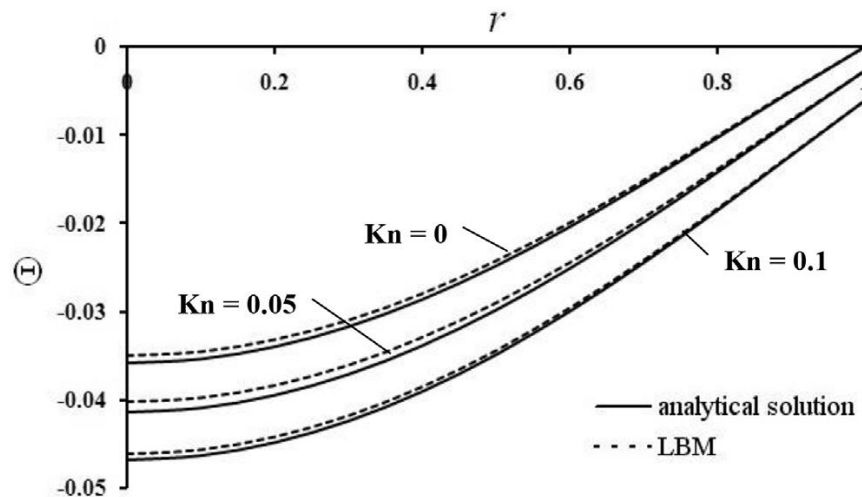


Рис. 3.2.6. Профілі температури у вертикальному циліндричному мікроканалі для різних чисел Кнудсена, $Pr = 1$ і $Ra = 10$

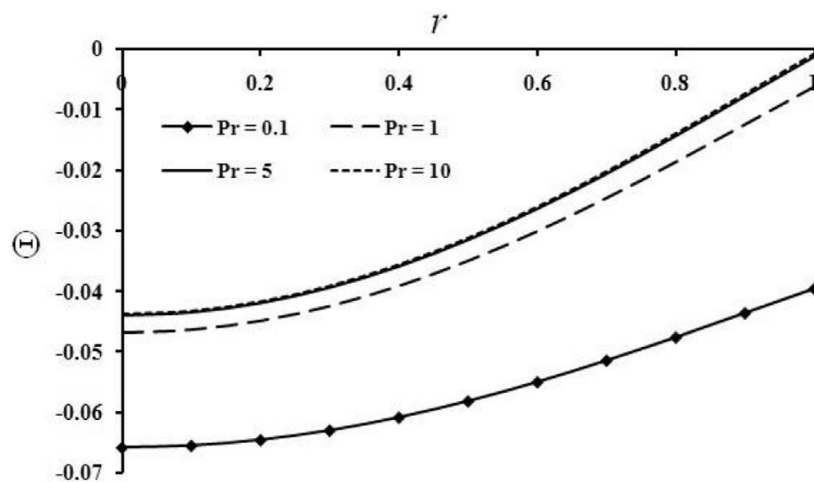


Рис. 3.2.7. Профілі температури у вертикальному циліндричному мікроканалі для різних чисел Прандтля, $Kn = 0.1$ і $Ra = 10$

На рис. 3.2.7 показано, що величина стрибка температури на стіні, обговорювана вище, залежить від числа Прандтля. Дані, отримані за допомогою методу ґрат Больцмана, не наведені на рис. 3.2.6, оскільки вони практично співпадають з аналітичним розв'язком. Зі збільшенням числа

Прандтля зменшується стрибок температури на стінці, що обумовлено визначенням самого стрибка температури, заданого граничними умовами (3.2.25). Зменшення стрибка температури нелінійне. Вже для чисел Прандтля $Pr > 5$ величина стрибка температури залишається асимптотично постійною.

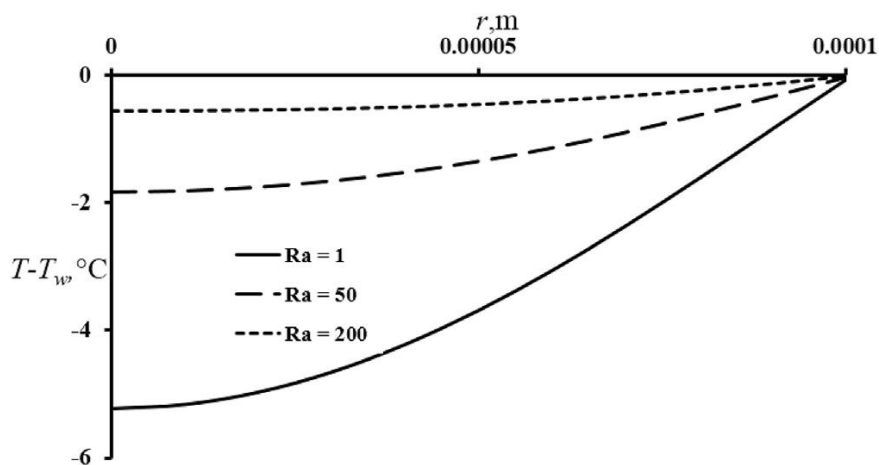


Рис. 3.2.8. Профілі температури у реальному вертикальному мікроканалі системи охолодження, $Kn = 0.1$, $Pr = 0.7$, $Re = 200$, $r_0 = 0.1\text{mm}$

На рисунку 3.2.8 показані температурні профілі в реальному мікроканалі, який являється частиною системи охолодження в електронному обладнанні, яке функціонує стабільно при температурах не вище $70\text{-}80^\circ\text{C}$. Ці обчислення були виконані за допомогою методу ґрат Больцмана. Як і очікувалося, при вищих числах Релея температурний профіль зменшується нерівномірно. Очевидно, що величина неоднорідності температури в поперечному перерізі каналу і сам рівень температури незначні. Тому можна знехтувати тепловим потоком випромінювання.

Локальний тепловий потік на стінці визначається за допомогою (3.1.33). У випадку, коли виконується лінійний розподіл (3.2.16), з рівняння (3.1.33) можна вивести

$$\frac{q_w r_0}{(T_m - T_w) \alpha c_p \rho} = \frac{Au_m r_0^2}{2\alpha(T_m - T_w)}, \quad (3.2.41)$$

де

$$u_m = \frac{2}{r_0^2} \int_0^{r_0} u r dr, \quad (3.2.42)$$

$$T_m = \frac{\int_0^{r_0} u T r dr}{\int_0^{r_0} u r dr} \quad (3.2.43)$$

являються середньою розмірною осьовою швидкістю та усередненою середньою температурою, відповідно. Рівняння (3.2.41) можна переписати в вигляді

$$\text{Nu} = \frac{1}{\Theta_m}, \quad (3.2.44)$$

де число Нуссельта визначається як

$$\text{Nu} = \frac{q_w 2r_0}{(T_m - T_w) \alpha c_p \rho}, \quad (3.2.45)$$

і усереднена безрозмірна середня різниця температур визначається співвідношенням

$$\Theta_m = \frac{\int_0^1 \Theta U R dR}{\int_0^1 U R dR}. \quad (3.2.46)$$

Враховуючи аналітичний розв'язок розподілу температури (3.2.39), а також визначення, наведені у рівнянні (3.2.44) та рівнянні (3.2.46), можна отримати число Нуссельта для циліндричного каналу у випадку чистої вимушеної конвекції ($\text{Ra} = 0$) без проковзування ($\text{Kn} = 0$)

$$\text{Nu}_{00} = 4.36. \quad (3.2.47)$$

Нижній індекс "00" означає число Нуссельта для випадку $\text{Ra} = \text{Kn} = 0$. За допомогою чисельного методу ґрат Больцмана отримано величину числа

Нуссельта для цих умов, воно рівне $Nu_{00} = 4.45$. Для оцінки адекватності цих результатів у порівнянні зі значеннями числа Нуссельта Nu_{00} , доступними в літературі, можна посилатися на підручник [72] по теплообміну. Як видно з таблиці 8-1. сторінка 437 [72], $Nu_{00} = 4.36$ для граничної умови $q_w = const$ для циліндричного каналу, показаного на рис. 3.2.1, що повністю співпадає з значенням Nu_{00} з рівняння (3.2.47).

Давайте розглянемо чистий вплив числа Релея (тобто випадок, коли $Kn=0$) на теплообмін при змішаній конвекції. Розрахункові значення числа Нуссельта для даного випадку були апроксимовані наступним емпіричним співвідношенням

$$Nu_0 = Nu_{00}(1 + 0.0337Ra). \quad (3.2.48)$$

Тобто, рівняння (3.2.48) дає кількісну оцінку впливу природної конвекції на теплообмін за рахунок змішаної конвекції для потоку без проковзування при $Kn=0$. Рівняння (3.2.48) виконується в діапазоні $Ra = 0 \dots 100$.

На рисунку 3.2.9 показано вплив чисел Релея, Кнудсена та Прандтля на нормоване число Нуссельта

$$\overline{Nu} = \frac{Nu}{Nu_0}. \quad (3.2.49)$$

Як видно з рисунка 2.3.9, вплив чисел Ra , Kn та Pr на число Нуссельта можна розділити на дві різні групи. Для всіх комбінацій чисел Ra , Kn і Pr , за винятком випадку $Pr = 10$ і $Ra = 200$ (рис. 2.3.9 с), збільшення числа Кнудсена зменшує швидкість передачі тепла. Це пояснюється збільшенням стрибка температури на стінці, що, в свою чергу, призводить до погіршення умов теплової взаємодії між рідиною та стінкою.

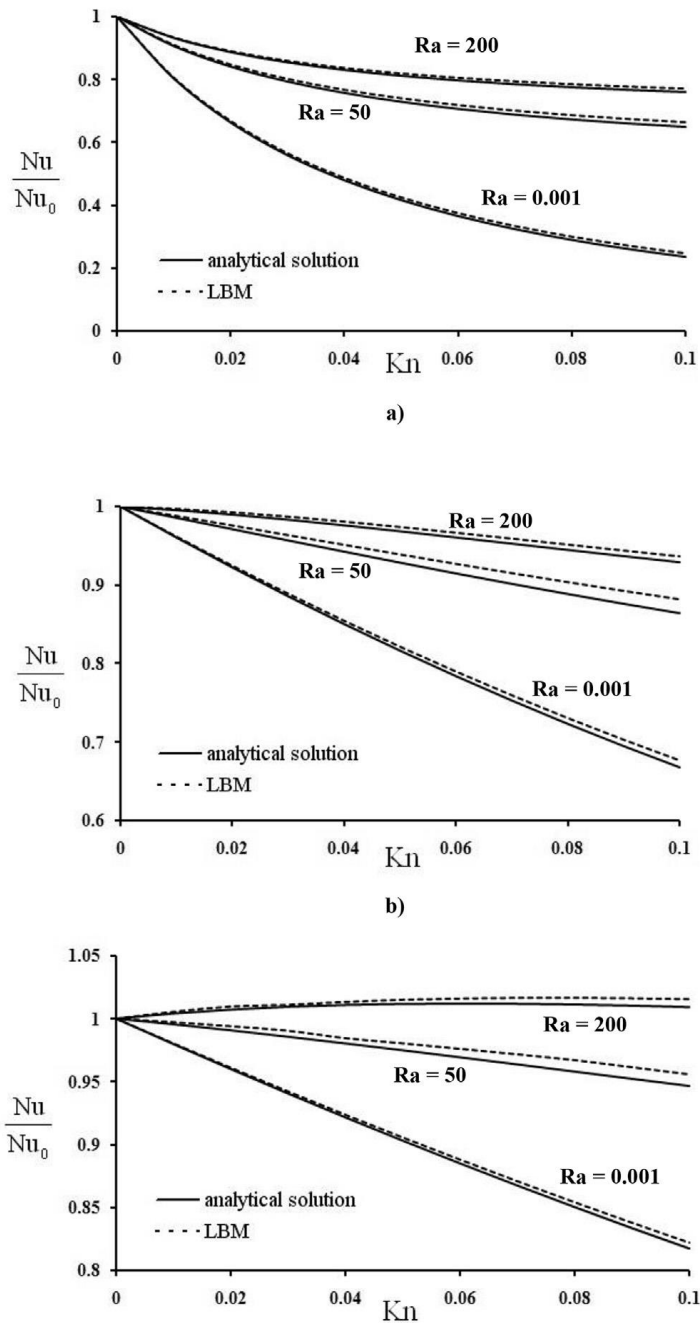


Рис. 3.2.9. Нормоване число Нуссельта в вертикальному циліндричному мікроканалі: а) $Pr = 0.1$, б) $Pr = 1$, в) $Pr = 10$

Для конкретної комбінації безрозмірних чисел $Pr = 10$ і $Ra = 200$ (рис. 2.3.9 в), збільшення чисел Прандтля і Релея призводить до послаблення ефекту проковзування. Як ми вже говорили вище, при збільшенні числа Прандтля стрибок температури на стінці зменшується. Фактично, для дуже високих чисел Прандтля стрибок температури на стінці каналу зникає. Збільшення числа Релея призводить до збільшення швидкості біля стінки, що супроводжується

інтенсифікацією теплопередачі. Це є причиною того, що теплова взаємодія в цих умовах нечутлива до ефекту проковзування, в той час як швидкість біля стінки в даних умовах набагато вище, ніж для $Kn = 0$. Спільний вплив цих двох чинників підвищує нормоване число Нуссельта.

Варто зазначити, що найменша варіація нормованого числа Нуссельта \overline{Nu} , яке визначено у рівнянні (3.2.49), спостерігається для високих чисел Релея. Це можна пояснити тим, що для високих чисел Релея число Нуссельта \overline{Nu} практично виходить на пряму при значеннях на 1-2% вищих за одиницю.

Круговий мікроканал, який досліджувався в даній роботі, і плоский мікроканал, досліджений Авраменко та ін. [66] - це дві геометрії, що описують граничні випадки для можливих поперечних перерізів каналу, які використовуються в практичних цілях. Тому є сенс порівнювати ефекти числа Релея та Кнудсена для цих геометрії, щоб з'ясувати; чи можна результати для одного каналу екстраполювати на інший канал.

Безпосередній вплив природної конвекції на теплопередачу в циліндричному каналі за рахунок змішаної конвекції описується формулою (3.2.48). Результати для плоского каналу були узагальнені Авраменком та ін. [66] використовуючи безрозмірні числа Ra і Kn , які включають половину висоти плоского каналу a як характерну довжину. Як тільки у визначенні безрозмірних чисел Ra і Kn буде використаний радіус каналу r_0 , ми будемо повторно обробляти результати Авраменко та співавторів [66], використовуючи еквівалентний радіус плоского каналу

$$r_e = \frac{2S}{\Pi} = 2a. \quad (3.2.50)$$

Тоді безпосередній вплив природної конвекції в плоскому каналі буде описаний рівнянням [66], перевизначеним за допомогою числа Релея на основі еквівалентного радіусу r_e

$$Nu_0 = Nu_{00}(1 + 0.012Ra), \quad (3.2.51)$$

$$\text{де } Ra = \frac{g\beta\rho r_c^4 A}{\alpha\mu}.$$

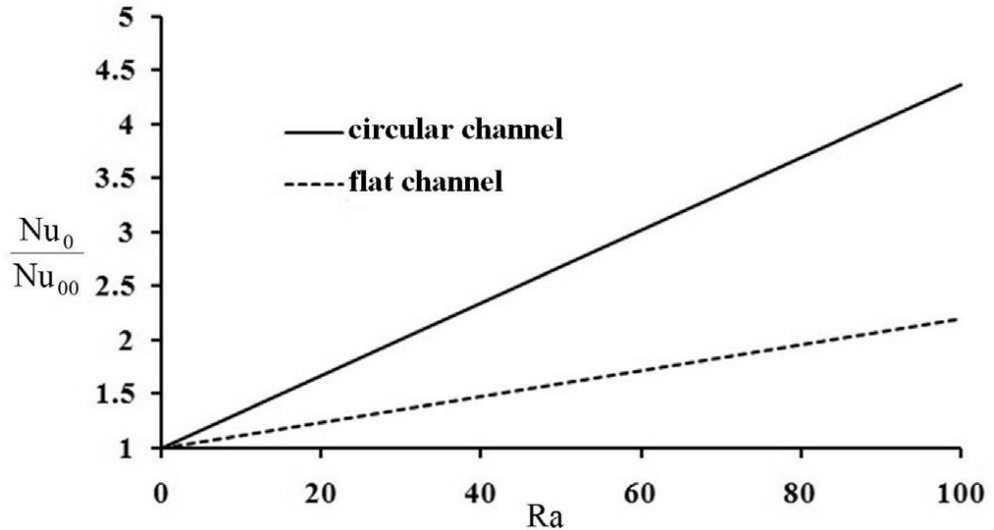


Рис 3.2.10. Нормоване число Нуссельта у вертикальномуциліндричному та пласкому мікроканалах.

На рис. 3.2.10 показано що безпосередній вплив природної конвекції в циліндричному каналі значно сильніший, ніж у пласкому каналі. Наприклад, для $Ra = 100$ відношення Nu_0/Nu_{00} рівне 4.37 для циліндричного каналу і 2.2 для плоского каналу. Фізична інтерпретація цього явища полягає в тому, що рідина в циліндричному каналі контактує зі стінкою по всьому поперечному перерізі, тоді як у нескінченно широкому пласкому каналі лише дві стінки контактують з рідиною, що значно послаблює вплив природної конвекції.

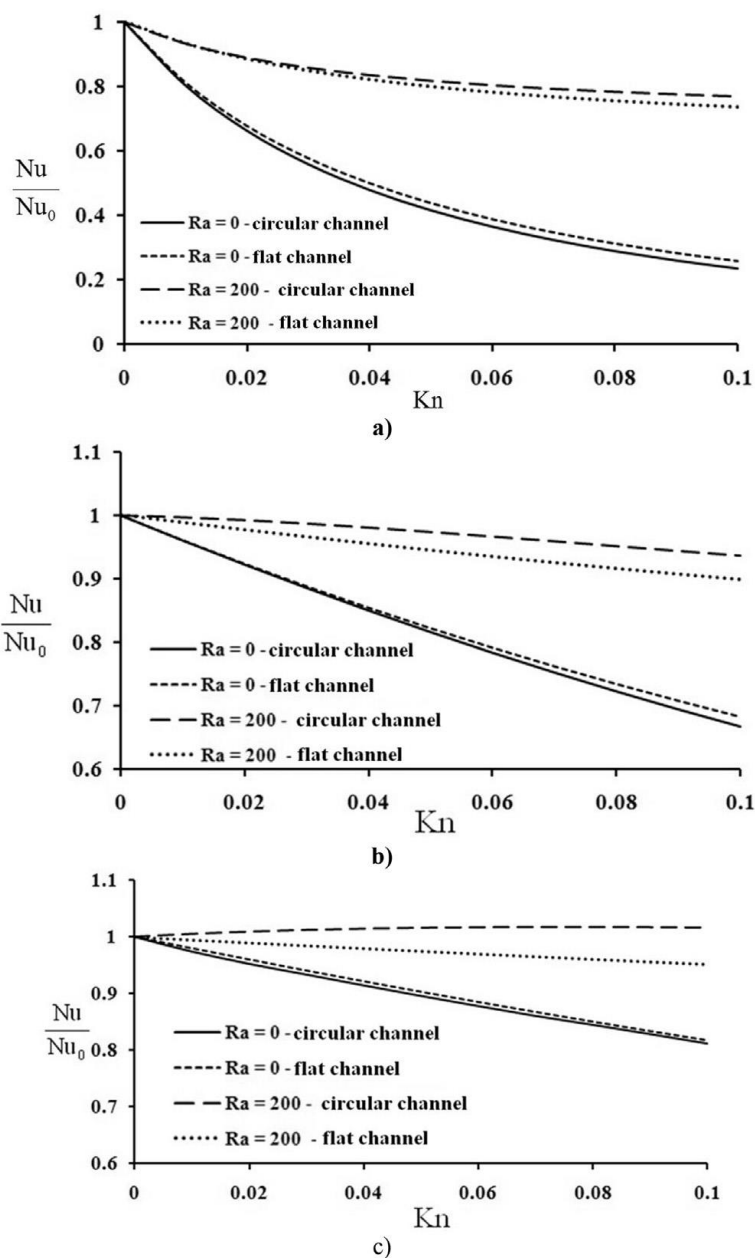


Рис 3.2.11. Нормоване число Нуссельта $\overline{Nu} = Nu/Nu_0$ у вертикальному циліндричному та плоскому мікроканалах: а) $Pr = 0.1$, б) $Pr = 1$, в) $Pr = 10$

Вплив числа Кнудсена на нормоване число Нуссельта Nu/Nu_0 в циліндричному та плоскому мікроканалах показано на рис. 3.2.11 для різних значень числа Прандтля. Нагадуємо, що число Кнудсена визначено за допомогою еквівалентного радіусу плоского каналу або геометричного радіусу циліндричного каналу. Для малого числа Прандтля $Pr = 0.1$ кількісний вплив числа Кнудсена на теплопередачу практично однаковий для всіх досліджених тут чисел Релея. Для більших числах Прандтля $Pr = 1$ і $Pr = 10$ кількісний вплив

числа Кнудсена залишаються незмінним в обох каналах за відсутності природної конвекції, для $Ra = 0$. Однак для $Ra = 200$ кількісний вплив числа Кнудсена істотно відрізняється, і ці відмінності збільшуються для більшого числа Прандтля $Pr = 10$. Як ми писали вище, коментуючи рисунок 2.3.9, при високих числах Прандтля стрибок температури на стінці каналу зникає. У поєднанні з високими числами Релея, що супроводжуються збільшенням швидкості біля стінки, виникає посилення теплопередачі. Оскільки в циліндричному каналі рідина контактує зі стінкою по всьому поперечному перерізі, що не має місце в плоскому каналі, це посилення теплопередачі більш явно виражається в циліндричному каналі (див. рис 3.2.11 b та c).

Отже форма поперечного перерізу мікроканалу значно впливає на швидкість теплопередачі для випадку змішаної (природної та вимушеної) конвекції за відсутності ефектів проковзування. Якщо ефекти проковзування присутні, форма поперечного перерізу каналу практично не впливає на теплопередачу за відсутності природної конвекції при $Ra = 0$. Однак для $Ra = 200$ і $Pr \geq 1$ результати для одного поперечного перетину каналу не можна екстраполювати на інший поперечний переріз.

3.3 Центробіжна нестійкість нанорідин з радіальною температурою та неоднорідністю концентрації

Мета даного підрозділу полягає у вивченні відцентрової нестійкості в зазорі течії нанорідини в криволінійному каналі, утвореному двома концентричними циліндричними поверхнями. Було розглянуто два випадки. По-перше, було розглянуто течію з внутрішньою поверхнею, по-друге – течію в криволінійному каналі з рухомими стінками, коли рух рідини здійснюється за рахунок азимутального сталого градієнту тиску. В першому випадку критерієм нестійкості є число Тейлора, а другому – число Діна.

Моделювання явищ переносу в потоці нанорідини потребує також розгляду рівняння для концентрації наночастинок з урахуванням броунівської дифузії та термофорезу. Крім того, ці ефекти мають бути включені також в рівнянні енергії. У даній роботі всі вищезгадані ефекти враховуються [77].

Для дослідження гідродинаміки, тепло- і масообміну та визначення критичного числа Тейлора був вибраний метод решіток Больцмана (LBM-Lattice Boltzmann Method). Значення критичних чисел визначалось за параметрами течії в момент виникнення її нестабільності.

Метод решіток Больцмана базується на дискретних рівняннях Больцмана в BGK-наближенні [67] (Bhatnagar-Gross-Krook).

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_v}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial f_v}{\partial x_i} &= \frac{1}{\tau} (f_v^e - f_v) + R_v, \\ \frac{\partial f_T}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial f_T}{\partial x_i} &= \frac{1}{\tau_T} (f_T^e - f_T) + R_T \\ \frac{\partial f_\phi}{\partial t} + v_i \cdot \frac{\partial f_\phi}{\partial x_i} &= \frac{1}{\tau_\phi} (f_\phi^e - f_\phi) + R_\phi\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

де f_v , f_T , f_ϕ - функції розподілу швидкості, температури та концентрації частинок відповідно. f_v^e , f_T^e , f_ϕ^e - рівноважні функції розподілу швидкості, температури та концентрації частинок відповідно, які відповідають рівноважному розподілу Максвелла.

Функція R_v описує силу Архімеда та базується на рівнянні стану

$$\rho = \phi \rho_p + (1 - \phi) \rho_{f0} (1 - \alpha(T - T_r)),\tag{3.3.2}$$

де T_r реперна температура, яка може дорівнювати T_1 , або T_2 .

Функції R_T та R_ϕ описують вплив броунівської дифузії та термофорезу на теплообмін та дифузію.

Моделювання проводилось в двовимірній постановці. Для двовимірних задач зазвичай використовується двовимірна решітка D2Q9 з дев'ятьма швидкісними каналами. Ініціалізація функцій розподілу швидкості, температури та концентрації частинок провадилась з використанням наступних виразів для рівноважного розподілу на решітці D2Q9 [77]

$$f_{vi}^e = w_j \rho \left[1 + \frac{3(e_j \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_j \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right], i = 0 \div 9, \quad (3.3.3)$$

$$f_{Ti}^e = \begin{cases} -\frac{3u^2}{2c^2}, & i = 0, \\ w_i T \left[\frac{3}{2} + \frac{3(e_j \cdot u)}{2c^2} + \frac{9(e_j \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right], & j = 1,2,3,4, \\ w_i T \left[3 + \frac{6(e_j \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_j \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right], & j = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (3.3.4)$$

$$f_{\phi i}^e = \begin{cases} -\frac{3u^2}{2c^2}, & i = 0, \\ w_i \phi \left[\frac{3}{2} + \frac{3(e_j \cdot u)}{2c^2} + \frac{9(e_j \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right], & j = 1,2,3,4, \\ w_i \phi \left[3 + \frac{6(e_j \cdot u)}{c^2} + \frac{9(e_j \cdot u)^2}{2c^4} - \frac{3u^2}{2c^2} \right], & j = 5,6,7,8 \end{cases} \quad (3.3.5)$$

вагові коефіцієнти для кожного напрямку вказані в (2.3.27).

Значення основних макропараметрів течії (густини, швидкості, тиску, енергії та концентрації наночастинок) за відомими функціями розподілу для решітки D2Q9 з дев'ятьма швидкісними каналами визначались за наступними виразами

$$\rho = \sum_i f_{vi},$$

$$\rho u = \sum_i v_i f_{vi},$$

$$p = \frac{1}{3} \sum_i (v_i - u)^2 f_{v_i}, \quad (3.3.6)$$

$$\rho e = \sum_i f_{T_i},$$

$$\rho \phi = \sum_i f_{\phi_i},$$

При моделюванні використовувались наступні граничні умови. На вході та виході каналу задані умови симетрії (нескінченний канал). На стінках - швидкості, що відповідають нерухомій стінці та стінці, що обертається; температури стінок; концентрація наночастинок на стінках відповідає наступному співвідношенню

$$\left(D_B \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_w = - \left(\frac{D_B}{T_w} \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w. \quad (3.3.7)$$

Перерахунок макропараметрів на границях в функції розподілу імпульсів, енергії та концентрацій виконувався за формулами (3.3.2), (3.3.3) та (3.3.4) відповідно.

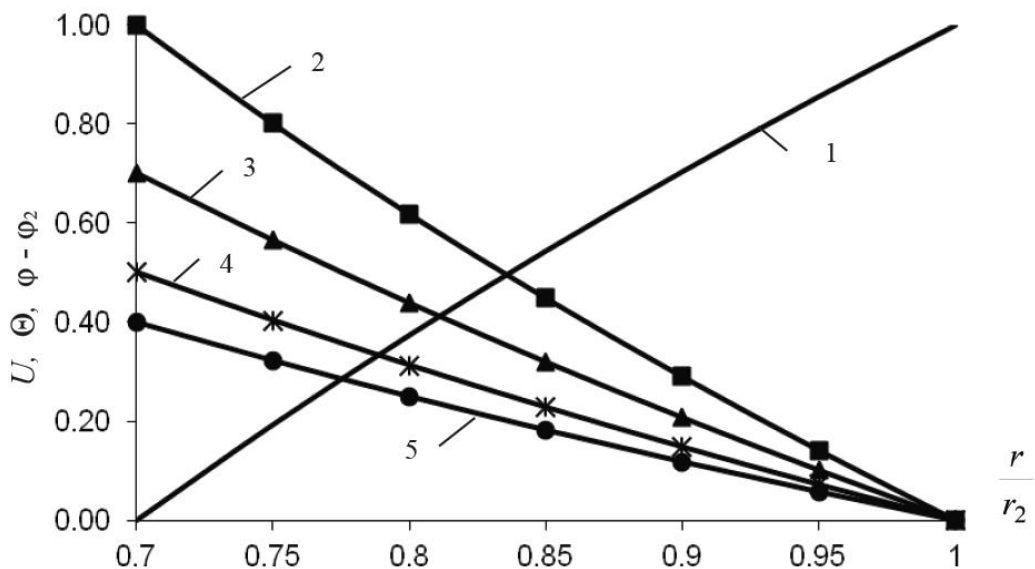


Рис. 3.3.1. Профілі незбурених швидкості, температури та концентрації наночастинок: 1 - Θ ; 2 - U ; 3 - $\phi - \phi_2$, при ($A = 0.4$), 4 - $\phi - \phi_2$, при ($A = 0.5$), 5 - $\phi - \phi_2$, при ($A = 0.7$)

Розрахунки течії нанорідини на основі методу ґрат Больцмана дозволили отримати незбурені та збурені характеристики гідродинаміки та тепло- і масообміну у зазорі утвореному двома концентричними циліндричними поверхнями з внутрішньою поверхнею, що обертається. На рис. 3.3.1 показані профілі незбурених швидкості, температури та концентрації наночастинок. Цей рисунок демонструє те, що градієнти концентрації та температури мають різні знаки. Це обумовлено взаємодією броунівського і термофоретичного процесів дифузії. При цьому швидкість слабо залежить від наявності наночастинок у потоці.

При певних значеннях чисел Тейлора та Діна в потоці можуть розвиватися вихорі, поява яких обумовлена відцентровою нестійкістю. Аналіз показує, що ця нестійкість залежить від безрозмірних комплексів η , N , M , A , Pr , Sc , які можна розписати таким чином:

$$N = \alpha(T_2 - T_1)Pr, \quad M = \frac{\rho_p}{\rho_{f0}} - 1, \quad (3.3.8)$$

$$Pr = \frac{\mu(\rho c)_{f0}}{\rho_{f0}k}, \quad Sc = \frac{\mu}{\rho_f D_B}, \quad (3.3.9)$$

$$\eta = \frac{R_1}{R_2}, \quad A = \frac{T_2 - T_1}{T_r} \frac{D_T}{D_B}. \quad (3.3.10)$$

Розглянемо вплив безрозмірних параметрів (3.3.8) - (3.3.10) на критичне число Тейлора. Критичне число Тейлора залежить від безрозмірних параметрів η , N , M , A , Le , Pr , Sc . Число Льюїса може бути записано як [78]

$$Le = \frac{Sc (\rho c)_{f0}}{Pr (\rho c)_p} \quad (3.3.11)$$

Результати досліджень [р3.п3.4- 81] показали, що значення $\frac{(\rho c)_{f0}}{(\rho c)_p}$ практично дорівнює одиниці. Таким чином, можна припустити це

$$Le \approx \frac{Sc}{Pr} \quad (3.3.12)$$

що дозволяє зменшити кількість безмірних критеріїв, які впливають на критичне число Тейлора.

Давайте розглянемо тепер вплив деяких безмірних параметрів на критичне число Тейлора. Малюнок 3.3.2 висвітлює вплив відносної щільності M наночастинок на Ta_{cr} .

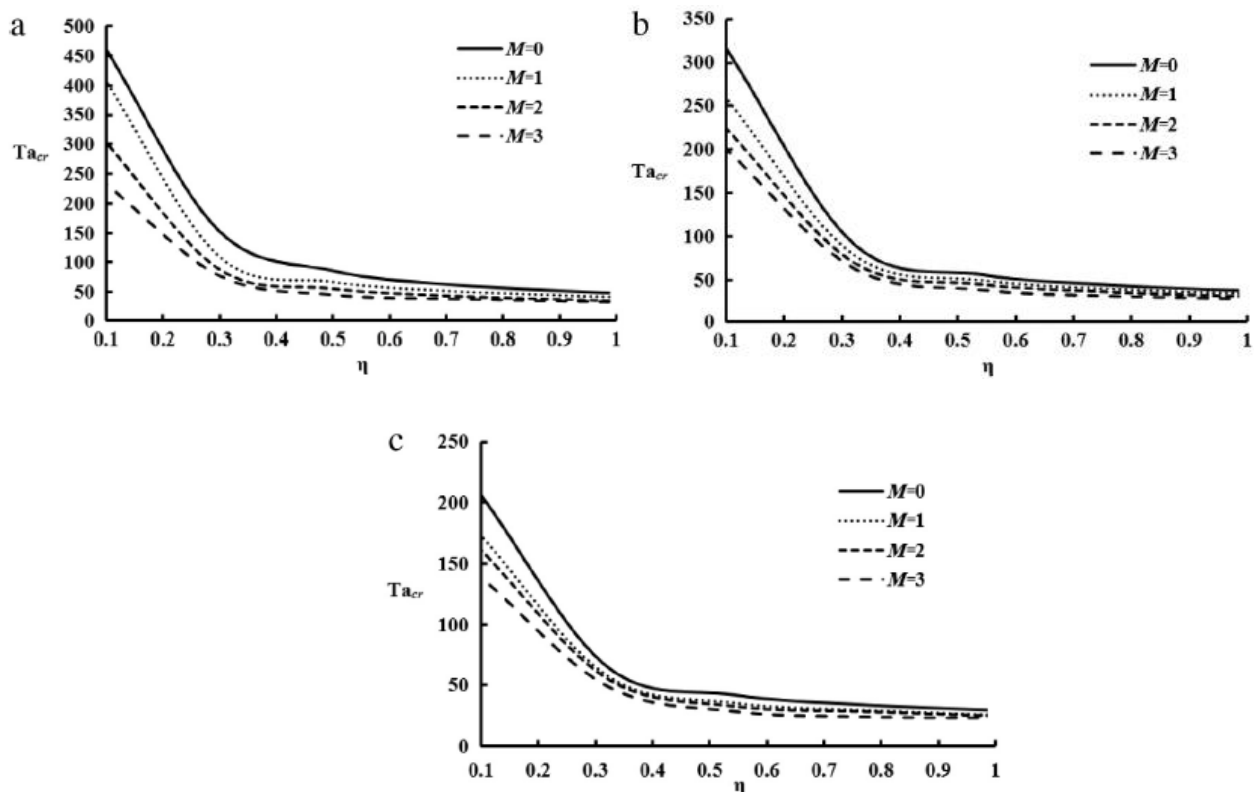


Рис. 3.3.2. Вплив параметра M на критичне число Тейлора. (a) $N = -1$, (b) $N = 1$, (c) $N = 4$

На рис. 3.3.3 видно, що відносне зменшення критичного числа Тейлора слабшає зі зростанням неоднорідності температури. На рис. 3.3.2 і на всіх рисунках нижче було розраховано співвідношення Ta_{cr}/Ta_{cr0} для $\eta = 0.3$. Максимальне зменшення співвідношення Ta_{cr}/Ta_{cr0} було зафіксовано за умови стабілізуючого впливу неоднорідності температури, де $N < 0$.

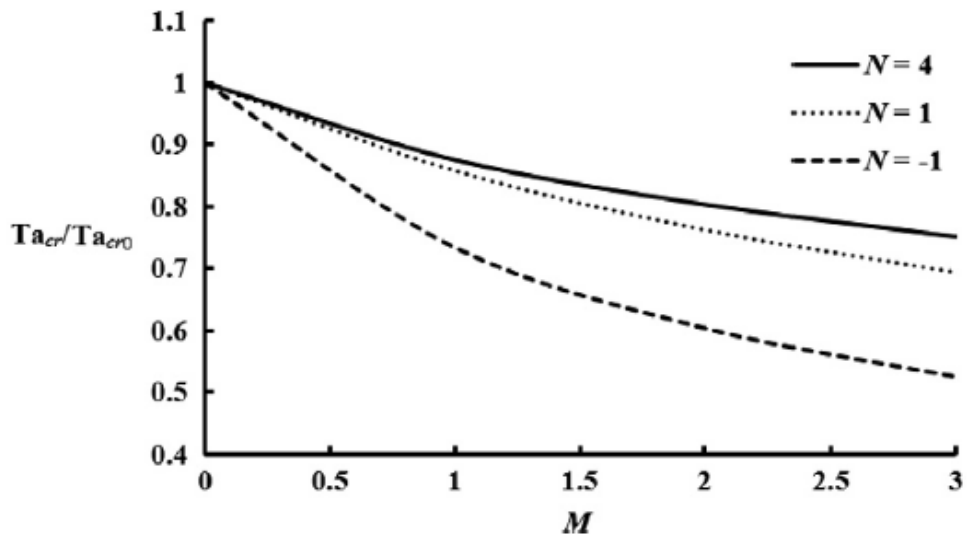


Рис. 3.3.3. Відносне критичне число Тейлора як функція параметра M .

Розрахунки показали, що стійкість потоку зменшується зі збільшенням відносної щільності M , яка може бути віднесена до додаткових збурень, які наночастинки вводять в потік. Результати залежності критичного числа Тейлора від параметра M для різної величини зазору між поверхнями наведено в табл. 3.3.1 [77].

Таблиця 3.3.1

η	$M = 0$	$M = 1$	$M = 2$	$M = 3$
0,99	48,75	40,84	35,39	32,27
0,95	50,16	41,84	36,61	33,07
0,7	63,28	51,21	44,1	37,31
0,5	86,21	66,45	56,49	11,4
0,3	152,79	109,21	89,03	76,95
0,1	460	406,64	302,91	232,174

Відносне зниження критичного числа Тейлора послаблюється зі збільшенням температури нерівномірності. Вплив комплексів M і N на критичне число Тейлора має дві протилежні тенденції: параметр N

супроводжується стабілізуючим впливом, а параметр M вносить дестабілізуючий ефект. Після того, як параметр N стає додатнім, обидва комплекси діють в тому ж напрямку, і ефект параметра M стає слабкішим при збільшенні значень параметра N . Це було прийнято до уваги під час розрахунків, зміна знака параметра M викликає відповідну зміну знака параметра A . Слід також зазначити, що вплив параметра M послаблюється через зменшення відносної ширини радіального зазору. Це пояснюється тим, що при великих значеннях η потік набагато більш нестабільний, ніж для низьких значень η .

Вплив параметра A на характер відцентрової нестійкості можна описати таким чином: потік стає менш стабільним при більш високих значеннях параметра A , тобто після інтенсифікації термічної дифузії, котра, в свою чергу визначається ступенем температурної нерівномірності. Проте, відносна ступінь впливу термодифузії послаблюється зі збільшенням температурної нерівномірності, та зі зменшенням радіального зазору. Це передбачає формальну аналогію між впливом параметрів M і A на значення критичних чисел Тейлора [79].

Вплив числа Прандтля на відцентрову нестійкість проявляється по-різному для випадків стійких ($N < 0$) і нестійких ($N > 0$) температурних градієнтів. При негативному температурному градієнті критичне число Тейлора збільшується зі збільшенням числа Прандтля, тобто потік стає більш стійким. У разі позитивних температурних градієнтів, збільшення числа Прандтля призводить до втрати стійкості течії. Ця тенденція може бути пов'язана з ефектом теплопровідності, який з'являється в знаменнику числа Прандтля. Для $N < 0$ збільшення числа Прандтля може бути викликане зниженою теплопровідністю, що додатково призводить до зниження температури в безпосередній близькості від увігнутої поверхні. Це, в свою чергу, тягне за собою збільшення щільності нанорідини і, отже, збільшення критичних значень числа Тейлора (рис. 3.3.4 (а)). Для $N > 0$ зменшення теплопровідності зменшує

швидкість зниження температури біля увігнутої стінки, яка викликає зниження щільності і відповідно дестабілізує потік (рис. 3.3.4 (b), (c)). Вплив числа Прандтля на критичне число Тейлора послаблює в невеликих радіальних зазорах як додатні, так і від'ємні температурні градієнти [78].

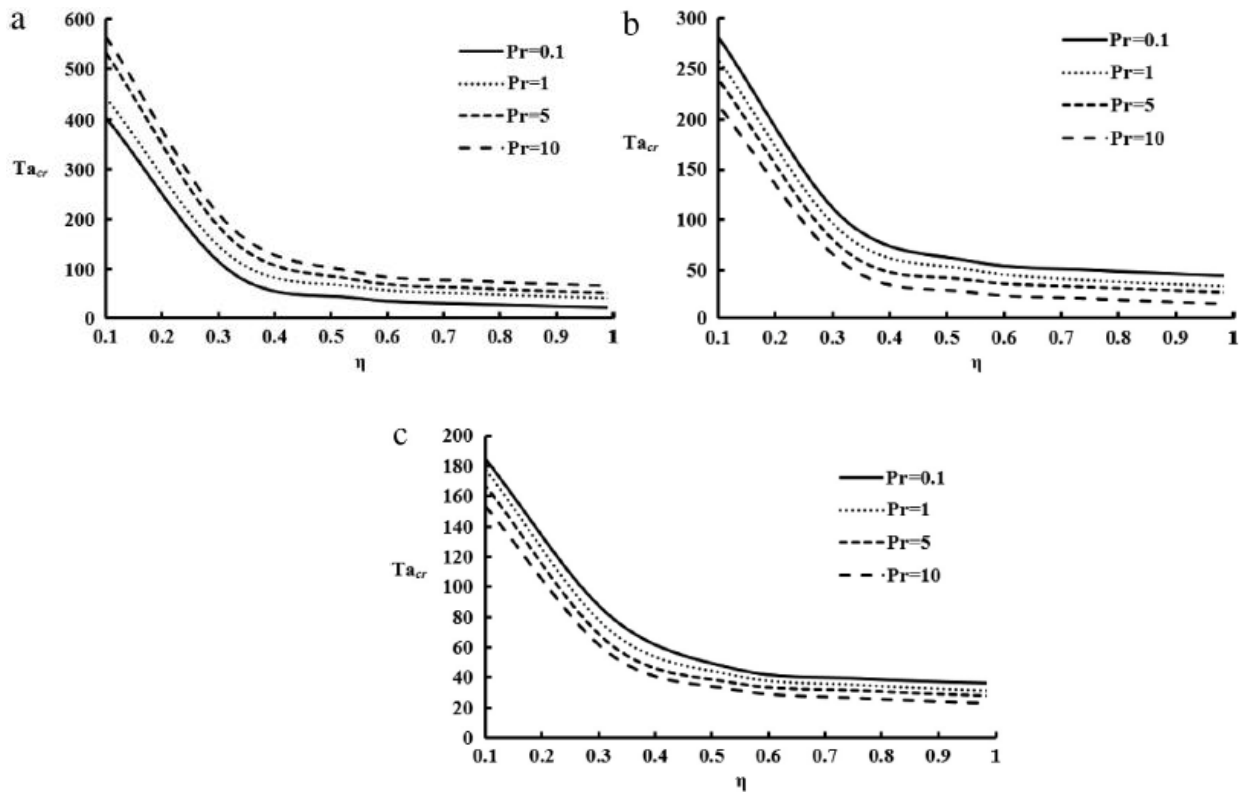


Рис. 3.3.4. Вплив числа Прандтля на критичне число Тейлора. (a) $N = -1$,
(b) $N = 1$, (c) $N = 4$

Розрахунки показали, що більш високі числа Шмідта викликали зниження стабільності потоку і для додатних і від'ємних температурних градієнтів. Це, вочевидь, обумовлено зменшенням коефіцієнта дифузії D_B , який призводить до зниження рухливості наночастинок, що в свою чергу призводить до втрати стійкості потоку. Цей висновок узгоджується з тенденціями, виявленими у дослідженні впливу параметрів M і A на критичне число Тейлора.

Зменшення відносного критичного числа Тейлора є досить різким, поки число Шмідта не досягає значення $Sc \approx 500$. Потім зниження критичного числа

Тейлора сповільнюється і приймає лінійну форму. В обох випадках вплив градієнта температури на відносне критичне число Тейлора є незначним.

Розглянемо вплив на критичні значення числа Діна, його можна представити в виді

$$De = Re \sqrt{\frac{h}{R_2}}. \quad (3.3.31)$$

Критичне число Діна залежить від безрозмірних параметрів η , N , M , A , Le , Pr , Sc [82].

Дослідження впливу числа Прандтля на відцентрову нестабільність показали, що цей ефект проявляється по-різному в області стабільних температурних градієнтів ($N < 0$) та області нестабільних температурних градієнтів ($N > 0$). Враховуючи від'ємні (стабільні) температурні градієнти, критичне число Діна (рис. 3.3.5 (a)) зростає із зростанням числа Прандтля, стійкість потоку зростає. Враховуючи додатній градієнти температури (рис. 3.3.5 (b) та 3.3.5 (c)), збільшення числа Прандтля тягне за собою дестабілізацію потоку. Ця тенденція може бути пояснена зміною теплопровідності, яка стоїть у знаменнику числа Прандтля. Коли $N < 0$ збільшення числа Прандтля може бути викликане зменшенням теплопровідності. Це послаблює інтенсивність теплопровідності. Як наслідок, збільшення числа Прандтля призводить до зниження температури рідини над увігнутими поверхнями. У свою чергу це призводить до збільшення густини рідини, а отже, до збільшення критичних чисел Діна. При $N > 0$ знижена теплопровідність зменшує швидкість зниження температури на увігнутій стінці, що викликає зменшення густини і, нарешті, дестабілізацію потоку. Вплив числа Прандтля на критичне число Діна зменшується для менших радіальних проміжків як для додатних, так і для від'ємних температурних градієнтів.

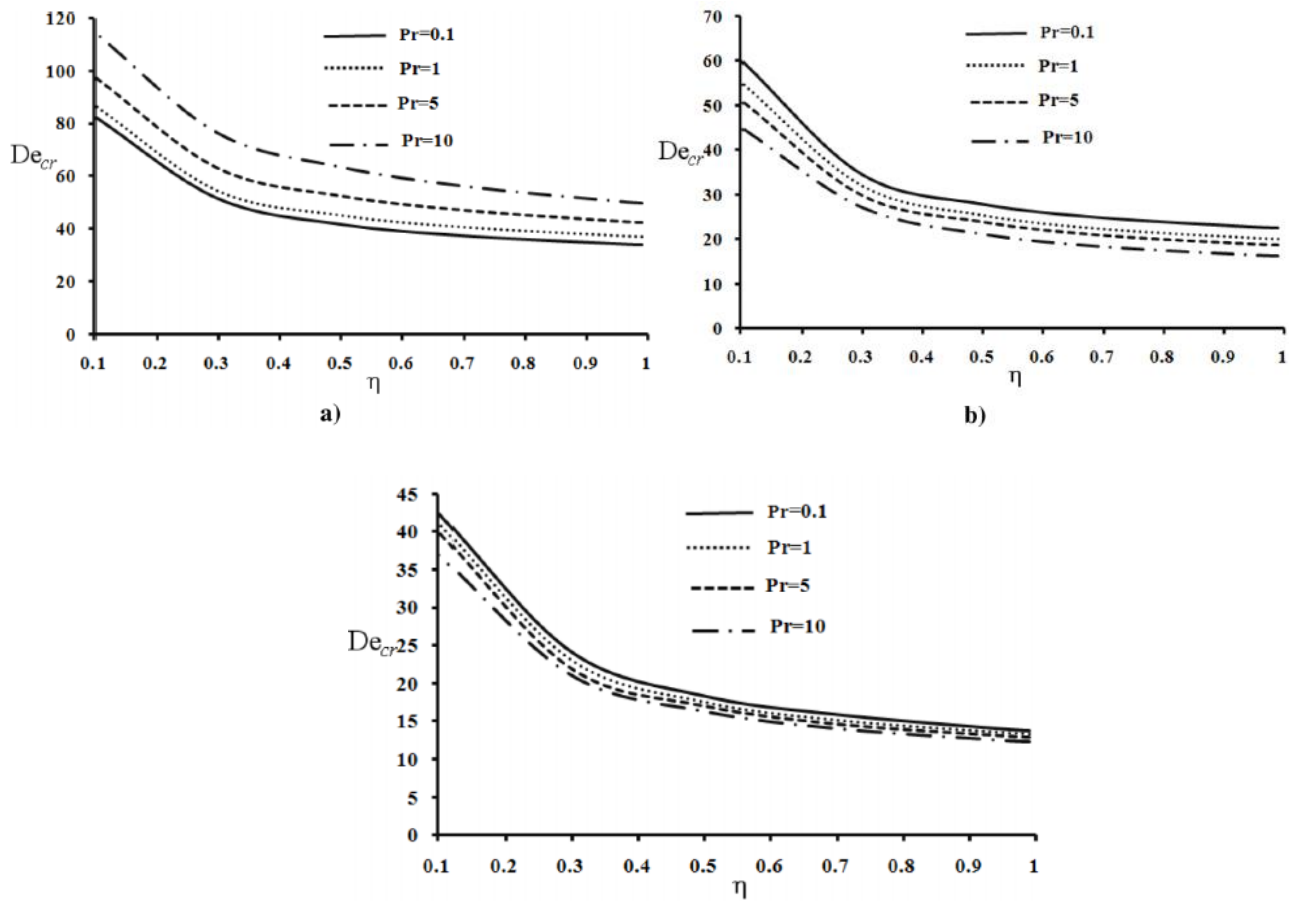


Рис. 3.3.5. Вплив числа Прандтля на критичне число Діна. (а) $N = -1$, (б) $N = 1$, (с) $N = 4$

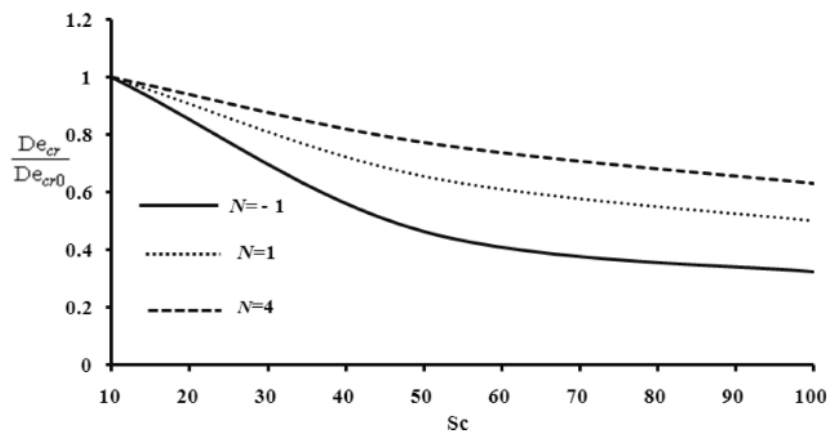


Рис. 3.3.6. Відносне критичне число Діна як функція числа Шмідта

Як видно з рис. 3.3.6, зменшення відносного критичного числа Діна, яке залежить від числа Шмідта, досить значне до значення $Sc \approx 50$. Після чого зменшення критичного числа Діна уповільнюється і стає лінійним. В той же час

впливом градієнта температури на відносне критичне число Діна можна знехтувати.

Результати, отримані в цьому розділі, були перевірені на основі теорії збурень (р. 2.4). Для цього була отримана лінеаризована система рівнянь для збурюючих амплітуд

$$(DD^* - \gamma^2)u_A = D^*u_0 v_{AR}, \quad (3.3.32)$$

$$(DD^* - \gamma^2)^2 v_{AR} = \frac{\gamma^2 u_0}{\xi} CN^2 (2u_A - u_0 (NT_{AR} - M\phi_A)), \quad (3.3.33)$$

$$(D^*D - \gamma^2)T_{AR} = DT_0 v_{AR} - \frac{1}{Le} ((2ADT_0 + D\phi_0)DT_{AR} + DT_0 D\phi_A), \quad (3.3.34)$$

$$(D^*D - \gamma^2)\phi_A + APr(D^*D - \gamma^2)T_{AR} = Sc D\phi_0 v_{AR}, \quad (3.3.35)$$

де

$$D = \frac{d}{dr}, \quad D^* = D + \frac{1-\eta}{\xi}, \quad (3.3.36)$$

$$v_{AR} = Re v_A, \quad T_{AR} = \frac{T_A}{Pr}, \quad (3.3.37)$$

$$Ta = Re \sqrt{\frac{h}{R_1}}, \quad Re = \frac{U_1 h \rho_{f0}}{\mu}. \quad (3.3.38)$$

Тут Pr , Sc , Ta , Re – числа Прандтля, Шмідта, Тейлора і Рейнольдса, відповідно. CN – число Тейлора або число Діна. A – безрозмірний параметр, що описує співвідношення термофорезу та броунівської дифузії. T – безрозмірна температура, \tilde{T} – температура, γ – безрозмірне хвильове число, ϕ – концентрація наночастинок, ρ – густина, c – питома теплоємність, k – теплопровідність нанорідини, μ – динамічна в'язкість нанорідини, η – зв'язок між радіусами внутрішньої та зовнішньої циліндричних поверхонь, ξ – безрозмірна радіальна циліндрична координата, v – безрозмірна радіальний складова швидкості, u – безрозмірна осьова складова швидкості

Розрахунки на основі системи (3.3.32) – (3.3.35) показали, що різниця між даними LBM та теорію збурень не перевершують 5%.

3.4 Турбулентний нестисливий потік в пласкому мікроканалі, що обертається

Метою даного дослідження є моделювання повністю розвиненого турбулентного потоку в мікроканалі, що обертається, та проведення детальної фізичної інтерпретації структури потоку. В якості метода моделювання, аналітичне рішення було використано в спрощеній двомірній (2D) постановці задачі в поєднанні з тривимірним (3D) числовим рішенням, що базується на методі LBM. Турбулентність моделюється на базі моделі Смогорінського, яка була пристосована до LBM [83].

Розглянемо стаціонарний потік у мікро каналі висотою $2h$, що обертається. Декартові координати показані на рис. 3.4.1. Градієнт тиску накладається в напрямку координати x . Рівняння кількості руху для турбулентного нестисливого потоку в каналі, який обертається з кутовою швидкістю ω навколо осі y наступні [84].

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \frac{d}{dy} \left(\nu_{eff} \frac{du}{dy} \right) + 2\omega w, \quad (3.4.1)$$

$$0 = \frac{d}{dy} \left(\nu_{eff} \frac{dw}{dy} \right) - 2\omega u, \quad (3.4.2)$$

де x , y та z - декартові координати (див. Рис. 3.4.1); u та w - компоненти вектора швидкості в x - і z -напрямку відповідно; ρ - щільність;

$$\nu_{eff} = \nu + \nu_t \quad (3.4.3)$$

це ефективна кінематична в'язкість, що складається з суми молекулярної та турбулентної в'язкості.

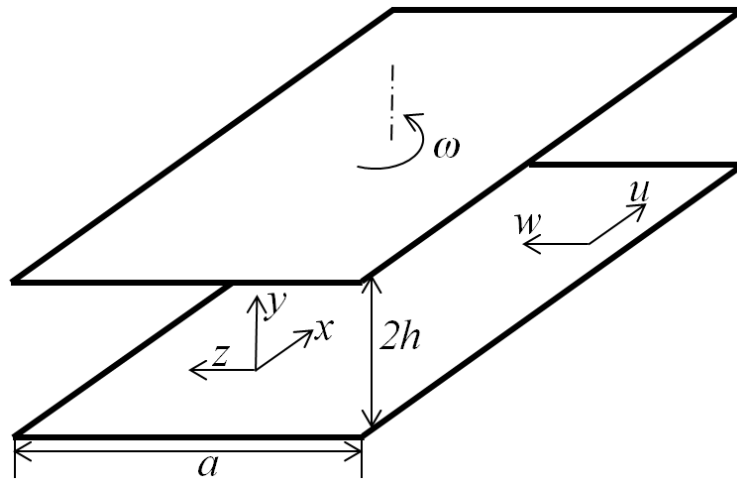


Рис. 3.4.1. Схема геометрії потоку

Модифікований тиск p , включений в рівняння (3.4.1) включає відцентрову силу і визначається як

$$p = p_s - \rho \omega^2 R^2 / 2, \quad (3.4.4)$$

де p_s - статичний тиск; R - радіус-вектор, який визначає відстань до осі обертання [85, 86, 87].

Граничні умови проковзування наступні

$$u = L \frac{du}{dy}, \quad w = L \frac{dw}{dy} \quad \text{при } y = 0, \quad (3.4.5a)$$

$$\frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{dw}{dy} = 0 \quad \text{при } y = h, \quad (3.4.5b)$$

де L - вільний шлях молекули газу. Гранична умова (3.4.5b) являє собою симетричну граничну умову на половині висоти плоского мікроканалу, зображеного на рис. 3.4.1 (часто називається «площиною симетрії» у програмному забезпеченні CFD). Інакше кажучи, реальний мікроканал має висоту $2h$, однак, завдяки симетрії потоку відносно площини $y = h$ ми розглядаємо тільки нижню частину каналу $0 \leq y \leq h$.

Перетворимо систему рівнянь (3.4.1), (3.4.2) та граничні умови (3.4.5) в безрозмірну форму. Для цього можна ввести безрозмірні швидкості та координати стінок

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau}, \quad w^+ = \frac{w}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{u_\tau y}{\nu}, \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.4.6)$$

Тут u_τ швидкість тертя (або швидкість зсуву), τ_w - напруження зсуву стінки. Також ми будемо використовувати зв'язок між постійним градієнтом тиску і напруження зсуву стінки для повністю розвиненого турбулентного потоку без проковзування, див. Schlichting і Gersten [88]

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{4\tau_w}{d_e}, \quad (3.4.7)$$

який також можна легко отримати з рівняння (3.4.1).

Тут d_e еквівалентний (або гідравлічний) діаметр

$$d_e = \frac{4S}{\Pi} = \frac{4a \cdot 2h}{a + 2h} = 4h, \quad (3.4.8)$$

де S – площа поперечного перерізу, Π - периметр і $a \rightarrow \infty$ являє собою ширину плоского каналу, зображеного на рис. 1.

Використовуючи безрозмірні швидкість та координати стінки, задані у рівнянні (3.4.6), можна привести рівняння (3.4.1) і (3.4.2) до безрозмірної форми

$$0 = \frac{4}{\text{Re}^+} + \frac{d}{dy^+} \left(\nu_{eff} \frac{du^+}{dy^+} \right) + 2\omega^+ w^+, \quad (3.4.9)$$

$$0 = \frac{d}{dy^+} \left(\nu_{eff} \frac{dw^+}{dy^+} \right) - 2\omega^+ u^+, \quad (3.4.10)$$

де

$$\nu_{eff} = 1 + \frac{\nu_t}{\nu}, \quad \omega^+ = \frac{\omega \nu}{u_\tau^2}, \quad \text{Re}^+ = \frac{d_e u_\tau}{\nu}. \quad (3.4.11)$$

При цьому граничні умови (3.4.4) та (3.4.5) можна перетворити як

$$u^+ = \text{Kn}^+ \frac{du^+}{dy^+}, \quad w^+ = \text{Kn}^+ \frac{dw^+}{dy^+} \quad \text{at } y^+ = 0, \quad (3.4.12)$$

$$\frac{du^+}{dy^+} = 0, \quad \frac{dw^+}{dy^+} = 0 \quad \text{at } y^+ = \text{Re}^+/4 = h^+. \quad (3.4.13)$$

Тут було враховано, що для поточної геометрії $d_e = 4h$, див. рівняння (3.4.8). У рівнянні (3.4.12)

$$\text{Kn}^+ = \frac{u_\tau L}{\nu} \quad (3.4.14)$$

це модифіковане число Кнудсена.

Для наступних виводів зручно залучити нову складну функцію

$$\phi = u^+ + iw^+. \quad (3.4.15)$$

Далі помножимо рівняння (3.4.10) на уявну одиницю i та додамо отримане рівняння до рівняння (3.4.9). В результаті отримуємо

$$0 = \frac{1}{h^+} + \frac{d}{dy^+} \left(\nu_{eff} \frac{d\phi}{dy^+} \right) - i2\omega^+ \phi. \quad (3.4.16)$$

З урахуванням рівняння (3.4.15), граничні умови (3.4.12) та (3.4.13) також можуть бути перетворені як

$$\phi = \text{Kn}^+ \frac{d\phi}{dy^+}, \quad \text{at } y^+ = 0, \quad (3.4.17)$$

$$\frac{d\phi}{dy^+} = 0, \quad \text{at } y^+ = h^+. \quad (3.4.18)$$

Загалом, турбулентна в'язкість є функцією поля швидкості. У цьому випадку диференціальне рівняння (3.4.16) нелінійне і не може бути вирішено аналітично. Тому, щоб спростити цю задачу, давайте зробимо припущення, що турбулентність є ізотропною, тоді як турбулентну в'язкість можна передбачити за допомогою простої моделі довжини змішування, див. Schlichting і Gersten [88].

$$\nu_t = (\kappa y)^2 \frac{du}{dy}, \quad (3.4.19)$$

де $\kappa \cong 0.4$ - константа Кармана. Як перше наближення, турбулентна в'язкість може бути розрахована з використанням класичного логарифмічного профілю швидкості, див. Шлихтинг і Герстен [88].

$$u = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln y + C, \quad (3.4.20)$$

де C - константа. Після підстановки рівняння (3.4.20) в рівняння (3.4.19) і далі до першого з рівнянь (3.4.11) можна отримати

$$v_{eff} = 1 + \kappa y^+. \quad (3.4.21)$$

Враховуючи рівняння (3.4.21) можна представити рівняння (3.4.16) в виді

$$0 = A + \frac{d}{d\eta} \left(\eta \frac{d\phi}{d\eta} \right) - i\Omega\phi, \quad (3.4.22)$$

де

$$\eta = 1 + \kappa y^+, \quad \Omega = \frac{2\omega^+}{\kappa^2}, \quad A = \frac{1}{\kappa^2 h^+}. \quad (3.4.23)$$

Граничні умови (3.4.12) та (3.4.13) можна переробити як

$$\phi = \text{Kn}^* \frac{d\phi}{d\eta}, \quad \text{at } \eta = 1, \quad (3.4.24)$$

$$\frac{d\phi}{d\eta} = 0, \quad \text{at } \eta = 1 + \kappa h^+ = H, \quad (3.4.25)$$

де

$$\text{Kn}^* = \kappa \text{Kn}^+. \quad (3.4.26)$$

Для подальшого аналітичного вирішення проблеми зручно ввести нову змінну

$$\xi = \sqrt{\eta}. \quad (3.4.27)$$

За допомогою цієї змінної, рівняння (3.4.22) можна представити в виді

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\phi}{d\xi} - 4i\Omega\phi = -4A. \quad (3.4.28)$$

Рівняння (3.4.28) - неоднорідне модифіковане рівняння Бесселя нульового порядку. Щоб розв'язати це рівняння, можна скористатися варіацією методу констант, див. Камке [89].

Першим кроком потрібно розв'язати однорідне рівняння, що відповідає рівнянню (3.4.28), тобто

$$\frac{d^2\phi}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d\phi}{d\xi} - 4i\Omega\phi = 0. \quad (3.4.29)$$

Це рівняння має наступний розв'язок [89]

$$\phi = AI_0(2\sqrt{i\Omega\xi}) + BK_0(2\sqrt{i\Omega\xi}), \quad (3.4.30)$$

де I_0 та K_0 - модифіковані функції Бесселя нульового порядку першого та другого роду відповідно; A та B - константи інтегрування. Відповідно до варіації методу констант, на другому кроці необхідно розв'язати наступну систему

$$\frac{dA(\xi)}{d\xi} I_0(2\sqrt{i\Omega\xi}) + \frac{dB(\xi)}{d\xi} K_0(2\sqrt{i\Omega\xi}) = 0, \quad (3.4.31)$$

$$\frac{dA(\xi)}{d\xi} \frac{dI_0(2\sqrt{i\Omega\xi})}{d\xi} + \frac{dB(\xi)}{d\xi} \frac{dK_0(2\sqrt{i\Omega\xi})}{d\xi} = -4A. \quad (3.4.32)$$

У цій системі параметри A і B слід розглядати не як константи, а як функції змінної ξ .

Враховуючи що

$$\frac{dI_0(\xi)}{d\xi} = I_1(\xi), \quad \frac{dK_0(\xi)}{d\xi} = -K_1(\xi), \quad (3.4.33)$$

можна легко інтегрувати систему рівнянь (3.4.31), (3.4.32) з граничними умовами (3.4.24), (3.4.25). В результаті отримуємо

$$\begin{aligned} \phi = \frac{iA}{\Omega} & \left(I_1(2\sqrt{i\Omega H}) K_0(2\sqrt{i\Omega \eta}) + I_0(2\sqrt{i\Omega \eta}) K_1(2\sqrt{i\Omega H}) - \right. \\ & I_1(2\sqrt{i\Omega H}) K_0(2\sqrt{i\Omega}) - I_0(2\sqrt{i\Omega}) K_1(2\sqrt{i\Omega H}) + \\ & \left. K_n^* \sqrt{i\Omega} (I_1(2\sqrt{i\Omega}) K_1(2\sqrt{i\Omega H}) - I_1(2\sqrt{i\Omega H}) K_1(2\sqrt{i\Omega})) \right) / , \quad (3.4.34) \\ & \left(I_1(2\sqrt{i\Omega H}) K_0(2\sqrt{i\Omega}) + I_0(2\sqrt{i\Omega}) K_1(2\sqrt{i\Omega H}) + \right. \\ & \left. K_n^* \sqrt{i\Omega} (I_1(2\sqrt{i\Omega H}) K_1(2\sqrt{i\Omega}) - I_1(2\sqrt{i\Omega}) K_1(2\sqrt{i\Omega H})) \right) \end{aligned}$$

Використовуючи зв'язок між функціями Бесселя та функціями Кельвіна [76],

$$\exp\left(\frac{i\pi m}{2}\right)I_m(\xi\sqrt{i}) = \text{ber}_m(\xi) + i\text{bei}_m(\xi), \quad (3.4.35)$$

$$\exp\left(-\frac{i\pi m}{2}\right)K_m(\xi\sqrt{i}) = \text{ker}_m(\xi) + i\text{kei}_m(\xi), \quad (3.4.36)$$

можна отримати дійсну та уявну частини рівняння (3.4.34). Тут ber і bie - це функції Кельвіна першого роду, тоді як ker і kei - функції Кельвіна другого роду [76].

Таким чином, на базуючись на рівняння (3.4.15), можна отримати дві складові швидкості в каналі. x -складова швидкості можна записати як

$$\begin{aligned} u^+ = \Re(\phi) = \frac{A}{\Omega} & \left(-\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega\eta})(\text{bei}_1(2\sqrt{\Omega H}) - \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega H})) \right. \\ & (-\text{ber}_1(2\sqrt{\Omega H})(-\sqrt{2}\text{Kn}^* \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega}) + \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega})) + \\ & \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega H})(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) - \sqrt{2}\text{Kn}^* \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega})) + \\ & \text{bei}_1^2(2\sqrt{\Omega H})(\text{kei}_0(2\sqrt{\Omega\eta})(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) - \sqrt{2}\text{Kn}^* \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega})) + \\ & (\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}))(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) - 2\sqrt{2}\text{Kn}^* \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega}) - (\text{ker}_0(2\sqrt{\Omega\eta}))) + \\ & \text{ber}_1^2(2\sqrt{\Omega H})(-2\sqrt{2}\text{Kn}^* \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega}) + \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega\eta})) \\ & (\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega})) + (-\sqrt{2}\text{Kn}^* \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega}) + \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}))\text{ker}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) + \\ & \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega H})\text{ber}_1(2\sqrt{\Omega H})(-\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega})\text{kei}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) - \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega})\text{kei}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) + \\ & \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega\eta})(-2\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega})) + \text{bei}_0(2\sqrt{\Omega})\text{ker}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) - \\ & \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega})\text{ker}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) + \sqrt{2}\text{Kn}^*(\text{bei}_1(2\sqrt{\Omega})\text{kei}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) + 2(\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega})(\text{bei}_1(2\sqrt{\Omega}) + \\ & \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega})) - \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega})\text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega})\text{ker}_0(2\sqrt{\Omega})) + \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega})\text{ker}_0(2\sqrt{\Omega\eta}))) \Big/ \\ & (\text{ber}_1^2(2\sqrt{\Omega H})(2\text{Kn}^{*2} \text{bei}_1^2(2\sqrt{\Omega}) - 2\sqrt{2}\text{Kn}^* \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega})(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega})) + \\ & (\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}))^2 + (\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}))^2) + \\ & \text{bei}_1^2(2\sqrt{\Omega H})(2\text{Kn}^{*2} \text{ber}_1^2(2\sqrt{\Omega}) + (\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{kei}_1(2\sqrt{\Omega}))^2 + \\ & (\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}))^2 + 2\sqrt{2}\text{Kn}^* \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega})(-\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}))) + \\ & 2\text{bei}_1(2\sqrt{\Omega H})\text{ber}_1(2\sqrt{\Omega H})(-\text{bei}_0^2(2\sqrt{\Omega}) - 2\text{Kn}^{*2} \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega})\text{ber}_1(2\sqrt{\Omega}) + \\ & \sqrt{2}\text{Kn}^*(\text{ber}_1(2\sqrt{\Omega})(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega})) + \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega})(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}))) - \\ & \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega})(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega})) + \text{bei}_0(2\sqrt{\Omega})(\text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}))) \Big) \end{aligned} \quad (3.4.37)$$

тоді як y -складова швидкості виглядає наступним чином

$$\begin{aligned}
w^+ = \text{Im}(\phi) = \frac{A}{\Omega} & \left(-\text{ber}_1^2(2\sqrt{\Omega H}) \left(-\sqrt{2\text{Kn}}^* \text{bei}_1^2(2\sqrt{\Omega}) + \right. \right. \\
& \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) \left(\sqrt{2\text{Kn}}^* \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega}) - \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) + \left(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) \right)^2 + \\
& \sqrt{2\text{Kn}}^* \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega}) \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) - \left(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) + \\
& \left(\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right)^2 + \text{bei}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) \left(-\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) + \\
& \left(\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) - \text{bei}_1^2(2\sqrt{\Omega H}) \left(-\sqrt{2\text{Kn}}^* \text{ber}_1^2(2\sqrt{\Omega}) + \right. \\
& \left. \left(\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) \right)^2 + \text{bei}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) \left(-\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) + \right. \\
& \left. \left(\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) + \left(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right)^2 + \right. \\
& \left. \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) \left(-\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \sqrt{2\text{Kn}}^* \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega}) + \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) + \right. \\
& \left. \left(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) - \sqrt{2\text{Kn}}^* \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) + \right. \\
& \left. \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega H}) \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega H}) \left(-2\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) - 4\text{Kn}^* \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega}) \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega}) + \right. \right. \\
& \left. \left. 2\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) - \right. \right. \\
& \left. \left. \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) - 2\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) + \right. \right. \\
& \left. \left. \text{bei}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) \left(-2\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) + 2\left(\text{bei}_0^2(2\sqrt{\Omega}) + \text{ber}_0^2(2\sqrt{\Omega}) - \right. \right. \\
& \left. \left. \text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) \left(\text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) \right) + \text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) + \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) + \right. \\
& \left. \sqrt{2\text{Kn}}^* \left(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) \left(\text{bei}_1(2\sqrt{\Omega}) + \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega}) \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) - \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega}) \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega\eta}) \right) \right) / \\
& \left(\text{ber}_1^2(2\sqrt{\Omega H}) \left(2\text{Kn}^* \text{bei}_1^2(2\sqrt{\Omega}) - 2\sqrt{2\text{Kn}}^* \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega}) \left(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) \right)^2 + \left(\text{bei}_1(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right)^2 \right) + \text{bei}_1^2(2\sqrt{\Omega H}) \left(2\text{Kn}^* \text{ber}_1^2(2\sqrt{\Omega}) + \right. \\
& \left(\text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) \right)^2 + \left(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right)^2 + 2\sqrt{2\text{Kn}}^* \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega}) \\
& \left(-\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) \left. \right) + 2\text{bei}_1(2\sqrt{\Omega H}) \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega H}) \left(-\text{bei}_0^2(2\sqrt{\Omega}) - \right. \\
& \left. 2\text{Kn}^* \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega}) \text{ber}_1(2\sqrt{\Omega}) + \sqrt{2\text{Kn}}^* \left(\text{ber}_1(2\sqrt{\Omega}) \left(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \text{bei}_1(2\sqrt{\Omega}) \left(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) \right) - \text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) \left(\text{ber}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) - \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) + \right. \\
& \left. \text{bei}_0(2\sqrt{\Omega}) \left(\text{kei}_0(2\sqrt{\Omega}) + \text{ker}_0(2\sqrt{\Omega}) \right) \right) \right)
\end{aligned} \tag{3.4.38}$$

Для чисельного моделювання було використувувати метод ґрат Больцмана (LBM).

Турбулентність моделюється за допомогою методу великих вихрів (large-eddy simulation LES) [83]. В рамках наближення БГК (BGK) рівняння Больцмана можна представити у кінцево-різницевій формі [53]

$$f(x_i + \Delta x_i, t + \Delta t) - f(x_i, t) = \frac{f^e - f}{\tau} + F(x_i, t). \tag{3.4.39}$$

Ми будемо використовувати ґрати $D3Q15$ (рис. 2.3.2). Розрахунок таких макропараметрів як густина та кількість руху будемо використовувати рівняння (2.3.15). Швидкість молекул визначається як

$$c = c_j = \sqrt{3RT} . \quad (3.4.41)$$

Рівноважний розподіл молекул визначається співвідношенням (2.3.29). Зовнішня сила Коріоліса в рівнянні (3.4.39) визначається як [83]

$$F_j = -3\psi_j \rho_* \frac{(\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{a})}{c^2} \Delta t \quad (3.4.47)$$

$$\mathbf{a} = -2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}$$

Ефективний час релаксації в рівнянні (3.4.39) має наступний вигляд [83]

$$\tau = \tau_0 + \tau_t , \quad (3.4.48)$$

де час релаксації τ_0 і τ_t відповідає молекулярній і турбулентній в'язкості, відповідно.

Згідно моделі Смогорінського, час турбулентного релаксації становить [83]

$$\tau_t = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\tau_0^2 + 2\sqrt{2}(C_s \Delta x)^2 (\rho_* c_s^4 \Delta t)^{-1} Q} - \tau_0 \right), \quad (3.4.49)$$

$$Q = \sqrt{2 \sum_{i,k} Q_{ik} Q_{ik}} , \quad (3.4.50)$$

$$Q_{ik} = \sum_j e_{ji} e_{jk} (f_j - f_j^e), \quad (3.4.51)$$

де нижні індекси i та k відповідають декартовим координатам ($i = 1,2,3; k = 1,2,3$), тоді як $C_s = 0.06$ - константа Смогорінського.

Час релаксації τ_0 при моделюванні мікропотоків визначається за допомогою числа Кнудсена, але без врахування в'язкості рідини [85]

$$\tau_0 = \text{Kn} N_y + \frac{1}{2} \quad (3.4.52)$$

$$\text{Kn} = \frac{\text{Kn}^+}{h^+} = \frac{\text{Kn}^*}{\kappa h^+}$$

де N_y - кількість елементів у стовпці ґратки в перерізі каналу. Швидкість проковзування на стінці розраховується як

$$\begin{aligned} u_w &= u' \frac{\text{Kn } N_y}{(1 + \text{Kn } N_y)} \\ w_w &= w' \frac{\text{Kn } N_y}{(1 + \text{Kn } N_y)} \end{aligned} \quad (3.4.53)$$

де u' і w' - компонентами швидкості в вузлах, що знаходяться поруч зі стінками.

Для реалізації методу LBM (включаючи модель Смогорінського) бібліотека Palabos [90] була використана в якості комп'ютерного програмного забезпечення.

Чисельне моделювання виконувалося з використанням однорідної прямокутної ґратки *D3Q15* (рис. 2.3.2). Використовувались наступні макроскопічні граничні умови: вздовж осі x , вхідний тиск на вхідному отворі та нульовий градієнт швидкості на виході; нульовий градієнт швидкості на площинах, ортогональних до осі z ; на площинах, ортогональних до осі y , непроникні стінки з компонентами швидкості проковзування u_w , w_w , розрахованими за допомогою рівнянь (3.4.53), тоді як y складова швидкості на цих площинах була задана і рівна нулю. Граничні умови на мікро рівні були вказані за допомогою методу, описаного в [91, 92].

Для вибору оптимального розміру решітки тестові обчислення виконувалися на сітках розміром $100 \times 20 \times 100$, $500 \times 200 \times 500$ та $1000 \times 400 \times 1000$ вздовж осі x , y , і z відповідно. Обчислення показали, що максимальна різниця в полях швидкості для сіток $500 \times 200 \times 500$ і $1000 \times 400 \times 1000$ не перевищувала 0,06%. Тому для подальшого моделювання використовувалася сітка з розміром $500 \times 200 \times 500$.

Процедура обчислення, що використовується в даному моделюванні, включає наступні кроки.

1. Ініціалізація LBM.
2. Виконання зіткнення (collision step).

3. Застосування правил оновлень параметрів на границі та обчислювання сил між об'єктами та потоком.

4. Етап потокової передачі (streaming step).

5. Обчислення макроскопічної густини та швидкості.

6. Регулювання часу релаксації згідно з моделлю subgrid.

7. Обчислювання фізики об'єкта.

8. Повернення до кроку 2, якщо немає конвергенції.

Для перевірки чисельної моделі, що застосовується у всіх наступних комп'ютерних експериментах, ми спочатку виконували обчислення в каналі, що не обертається ($\Omega = 0$). Результати цих обчислень, отримані на підставі аналітичної моделі та методу LBM, зображені на рисунку 3.4.2 для граничних умов без проковзування і з проковзуванням, тобто для $K_n^* = 0$ і $K_n^* = 1.426$, використовуючи нормалізацію локальної швидкості відносно центральної (максимальної) швидкості. Це значення числа Кнудсена було обрано для порівняння наших обчислень та результатів прямого чисельного моделювання, отриманих Мін і Кім [93]. В даних розрахунках число Рейнольдса $Re = u_m d_e / \nu$ дорівнювало 14700, де u_m середня швидкість у каналі. Існують очевидні відмінності між профілями, розрахованими на основі аналітичного рішення та методу ґрат Больцмана. Такі відмінності між аналітичними та числовими рішеннями можна пояснити тим, що лінеаризована модель турбулентної в'язкості (3.4.21) не може враховувати всі аспекти спаду турбулентності в області поблизу стінки. Добре відомо [88], що спад турбулентності поблизу стінки експоненціально залежить від відстані до стінки.

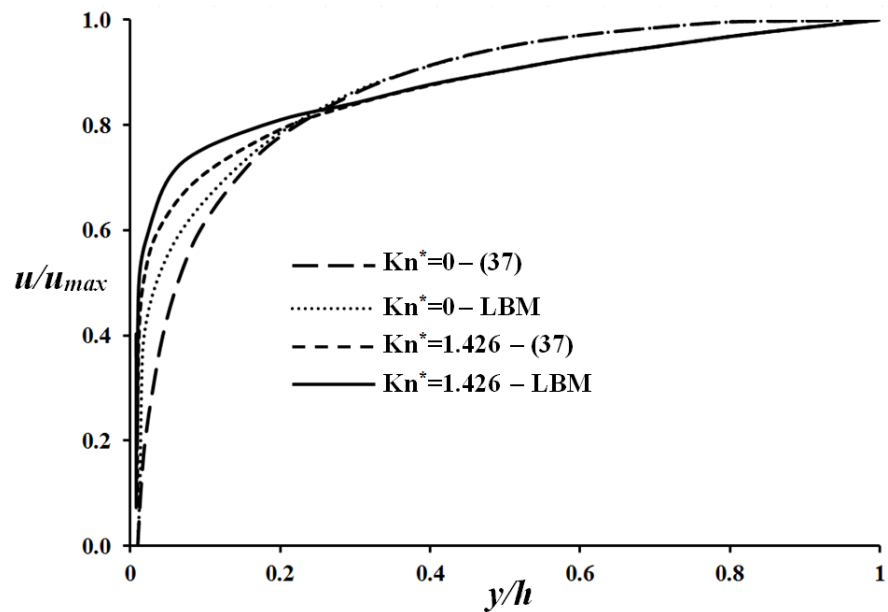


Рис. 3.4.2. Профіль x -компоненти швидкості для граничних умов без проковзування ($\text{Kn}^* = 0$), і для $\text{Kn}^* = 1.426$ в каналі, що не обертається ($\Omega = 0$)

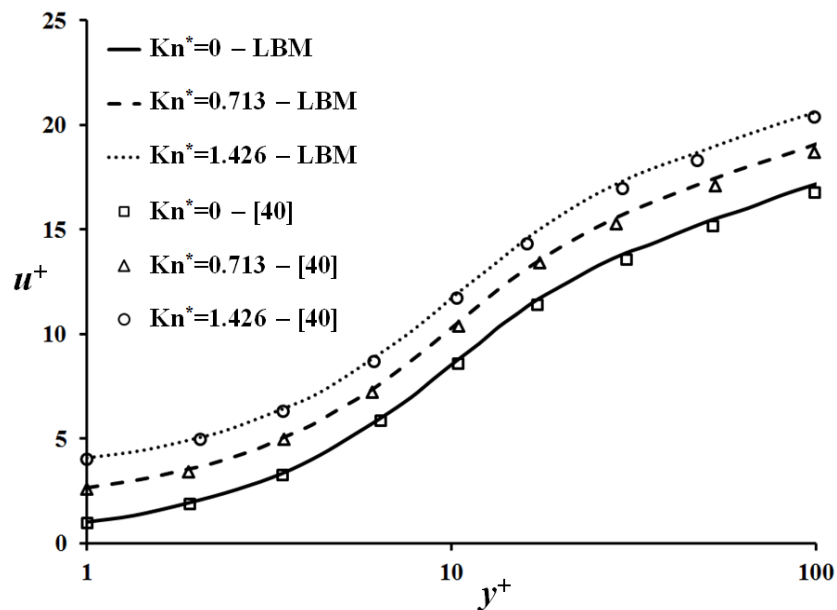


Рис. 3.4.3. Порівняння розрахованих профілів швидкості в каналі, що не обертається ($\Omega = 0$). Лінії - наші розрахунки, отримані за допомогою LBM, точки - обчислення Міна і Кіма [93]

На рисунку 3.4.3 представлено валідацію обчислень профілів швидкості, виконаних у даному дослідженні на основі LBM, у порівнянні з результатами прямого чисельного моделювання, отриманими Мін і Кім [93]. Обидва набори профілів швидкості демонструють дуже хорошу узгодженість, що підтверджує

високу точність моделювання потоку з проковзуванням за допомогою методу LBM у даній роботі.

Аналітичні та чисельні розрахунки вказують на те, що ефекти обертання та проковзування сильно впливають на потік рідини в каналі. Також примітно, що обертання впливає на профіль швидкості, починаючи з певної відстані від стінки. У той же час вплив проковзування проявляється в області, безпосередньо прилеглий до стінки каналу. Проте вплив обох факторів не є незалежними один від одного. На рис. 3.4.4 зображені профілі x -компоненти швидкості рідини як функція безрозмірних параметрів Ω і Kn^* , отриманих з аналітичних розрахунків. Вісь ординат відображає нормовану швидкість

$$U = \frac{u^+ \Omega}{A} = 2 \frac{u \omega h}{u_\tau^2}. \quad (54)$$

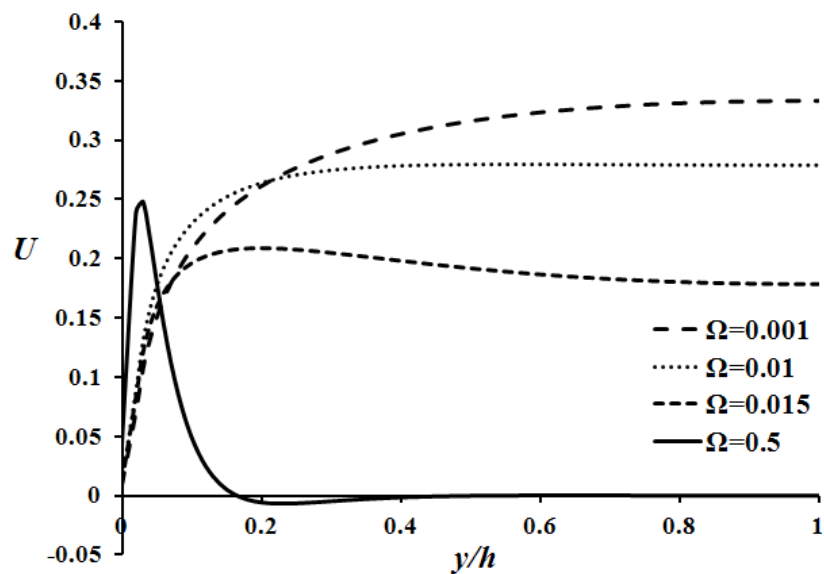


Рис. 3.4.4. Профіль швидкості x -компоненти для $\text{Kn}^* = 0.1$ і різних значень Ω

Як впливає з рис. 3.4.4, величина похідної x -компоненти швидкості рідини на стінці каналу збільшується разом із збільшенням кутової швидкості обертання. В результаті, профілі швидкості стають М-подібними (з урахуванням площини симетрії).

Проаналізувавши рис. 3.4.5 стає очевидним що збільшення сили Коріоліса (тобто кутової швидкості) призводить до зменшення x -компоненти швидкості потоку в центральній частині каналу, що в результаті призводить до

появи зворотного потоку, що характеризується від'ємним значеннями швидкості потоку. Величина безрозмірного параметра Ω (який кількісно виражає вплив сили Коріоліса) на початку зворотного потоку дорівнює 0.055 і не залежить від числа Кнудсена. Це підтверджується як аналітичним розв'язком, так і числовим моделюванням. Незалежність порогового значення $\Omega_R = 0.055$ може бути пов'язане з незначним впливом числа Кнудсена на потік рідини в центральній частині каналу. Найбільш значний вплив числа Кнудсена можна спостерігати поблизу стінки.

Посилення сили Коріоліса обумовлює розширення області зворотного потоку. Проте число Кнудсена не впливає як на ширину цього регіону, так і на порогове значення параметра обертання на початку зворотного потоку $\Omega_R = 0.055$. На рис. 3.4.5 показана динаміка зміни форми профілю компоненти швидкості U в залежності від параметра Ω для числа Кнудсена $\text{Kn}^* = 0.1$.

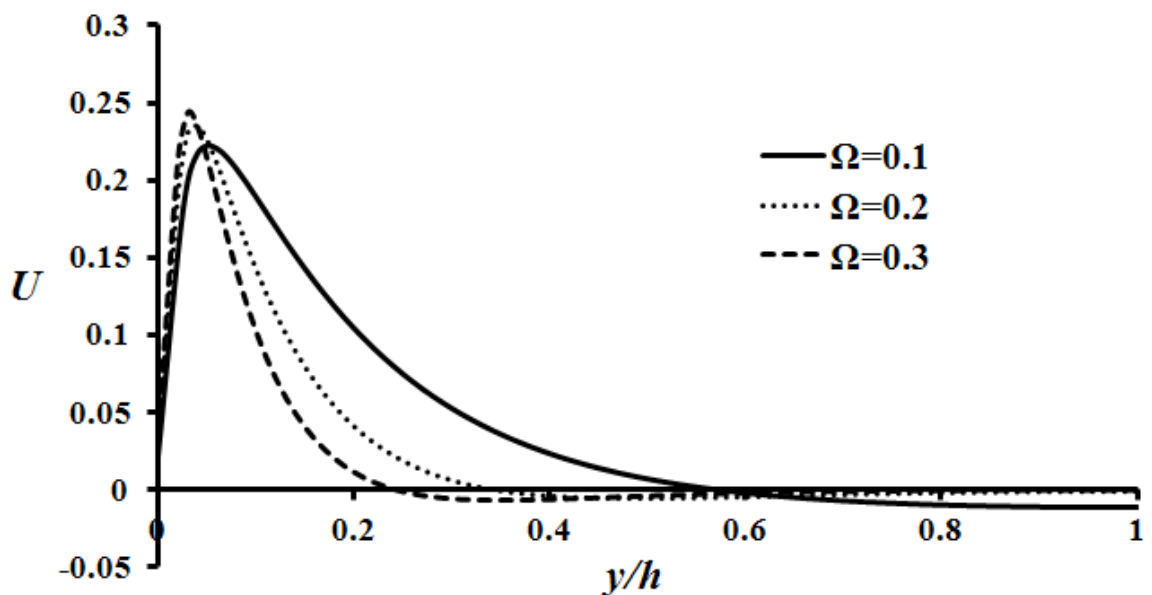


Рис. 3.4.5. Профілі швидкості x -компоненти для $\text{Kn}^* = 0.1$ і різних значень Ω

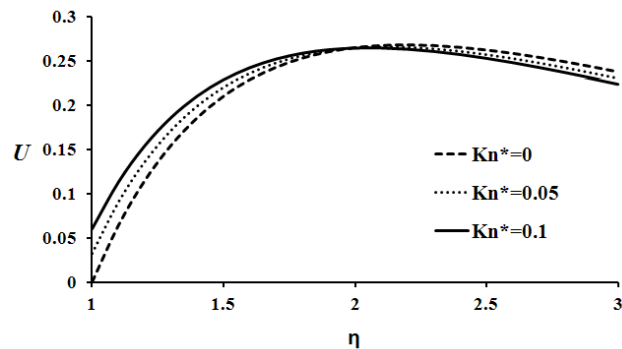
На рис. 3.4.5 можна побачити, що при більших значеннях параметра Ω межа зворотного потоку $(y/h)_R$ зміщується ближче до стіни. Варіація координати $(y/h)_R$ залежно від збільшення параметра Ω нелінійно. Ця

залежність може бути апроксимована емпіричним рівнянням, дійсним у діапазоні $\Omega = 0.055 - 0.5$

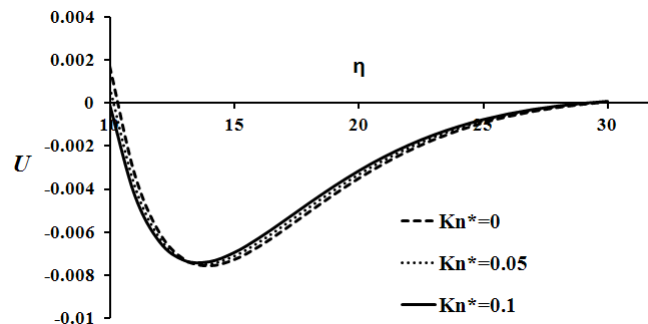
$$\left(\frac{y}{h}\right)_R = 2.17 - 31.26\Omega + 218.4\Omega^2 - 762.9\Omega^3 + 1288\Omega^4 - 826.8\Omega^5. \quad (3.4.55)$$

З рисунка 3.4.5 випливає, що для вищих значень параметра Ω максимальне значення компоненти швидкості U дещо збільшується і зміщується до стінки каналу.

При $\Omega > 0.95$ поблизу центру каналу виникає область додатних швидкостей течії. Отже, область зворотного потоку зміщується у бік стінки каналу, тоді як максимальна інтенсивність зворотного потоку зменшується, що показано на рис. 3.4.6b. Через обмежену адекватності моделі лінійної турбулентності в пристінковій області криві на рис.6 були розраховані на основі моделі LBM.



a)



b)

Рис. 3.4.6. Профіль швидкості x -компоненти поблизу стінки для $\Omega = 1$ та різні значення числа Кнудсена.

Як можна було очікувати, збільшення числа Кнудсена призводить до збільшення стрибка швидкості на стінці (рис. 3.4.6а). У цьому випадку, чим більше числа Кнудсена, тим ближче переміщується максимальна швидкість до стінки, і тим більший стрибок швидкості після максимальної точки. Всі обговорені перетворення профілю швидкості обумовлені стрибком швидкості на стінці та сталістю масової витрати.

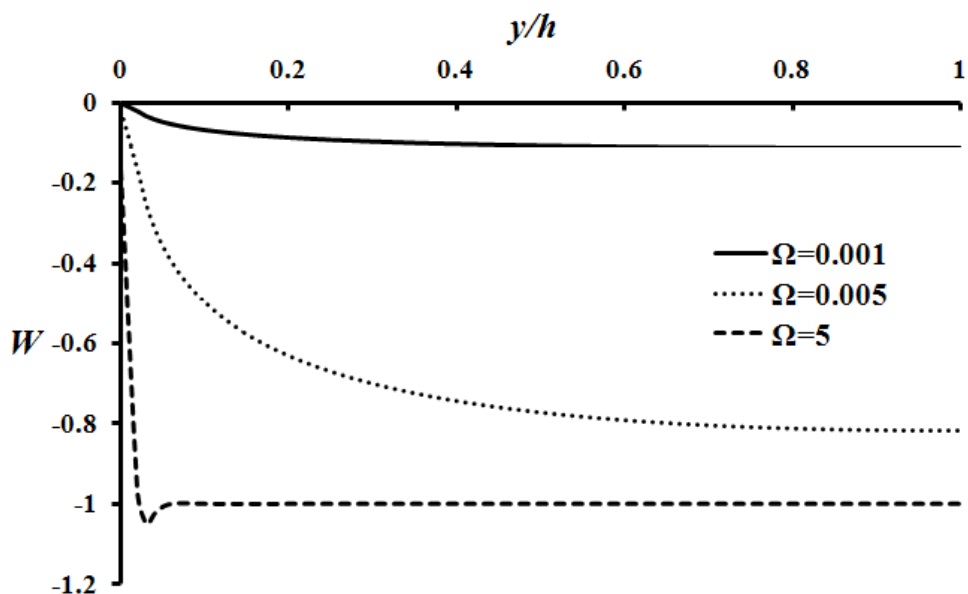


Рис. 3.4.7. Профілі швидкості z -компоненти для різних значень Ω

На рис. 3.4.7 зображені розподіли z -компоненти швидкості потоку

$$W = \frac{w^+ \Omega}{A} = 2 \frac{w \omega h}{u_\tau^2}. \quad (3.4.56)$$

Очевидно, що за аналогією з x -компонентою швидкості потоку, похідна швидкості на стінці зростає зі збільшенням інтенсивності обертання (тобто кутової швидкості). Починаючи з певного значення параметра обертання Ω , профіль швидкості виявляє максимум. Це значення дорівнює $\Omega_z = 0.05$ і не залежить від ефектів проковзування (тобто числа Кнудсена).

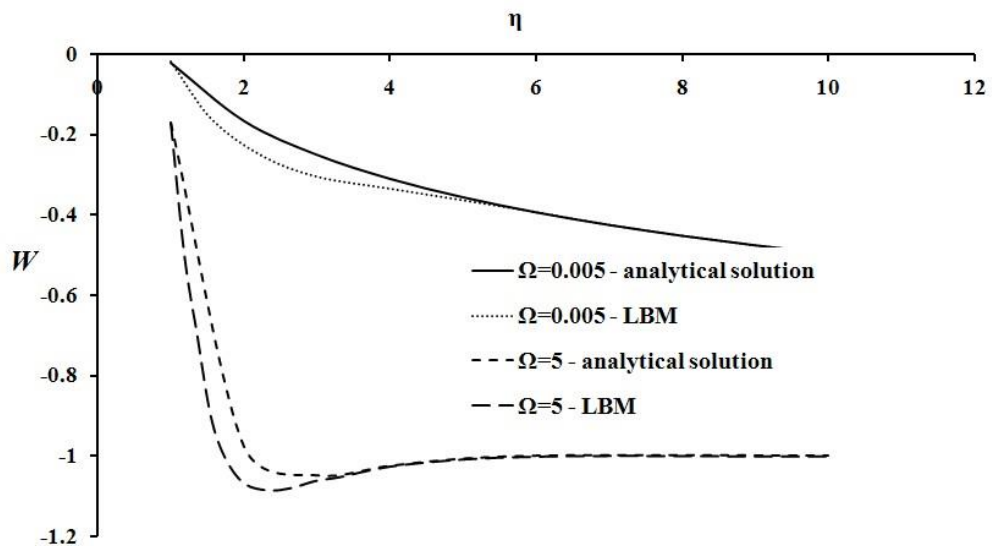


Рис. 3.4.8. Профіль швидкості z -компоненти поблизу стінки для $Kn^* = 0.1$ і різних значень Ω

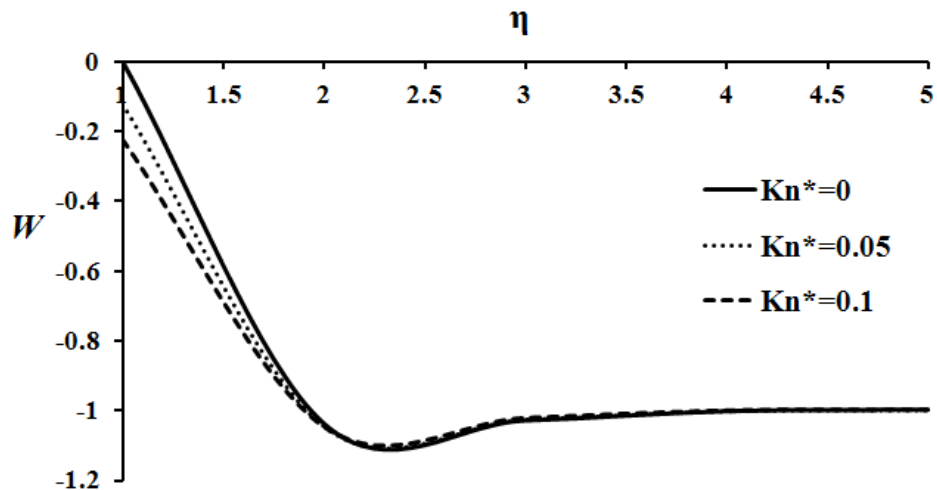


Рис. 3.4.9. Профілі швидкості z -компоненти поблизу стінки для $\Omega = 10$ та різних значень числа Кнудсена

На рис. 3.4.8 зображено z -компоненту швидкості потоку біля стінки. Тут аналітичне рішення порівнюється з результатами моделювання LBM. Знову видно, що поблизу стіни спостерігається максимальна розбіжність між аналітичними та числовими рішеннями. Далі від стінки ці відхилення зникають.

Профілі швидкості поблизу стінки, обчислені за допомогою методу ґрат Больцмана, показані на рисунку 3.4.9. З цього поля видно, що, як і x -компонента швидкості потоку, величина стрибка швидкості на стінці зростає зі збільшенням числа Кнудсена. Коли безрозмірна координата перевищує значення $\eta \approx 3$, відмінності між профілями швидкості стають практично

незначними. Таким чином, незначні розбіжності між аналітичними та числовими обчисленнями для W -компоненти швидкості потоку зникають раніше, ніж розбіжності обчислень для U -компоненти швидкості потоку (нагадуємо, що значення η_s , згадане вище, приблизно дорівнює 5).

Результати моделювання за допомогою LBM дозволили оцінити гідравлічний опір каналу за допомогою відношення Дарсі-Вайсбаха

$$-\frac{dp}{dx} = \lambda \frac{1}{d_e} \frac{\rho u_m^2}{2}, \quad (3.4.57)$$

де λ - коефіцієнт тертя Дарсі. Ці дані представлені на рисунках 10 і 11.

Рисунок 3.4.10 відображає вплив параметра обертання

$$\Omega^* = \frac{\omega v}{u_m^2}. \quad (3.4.58)$$

на гідравлічний опір. По своїй структурі цей параметр аналогічний параметру Ω . Різниця полягає в тому, що параметр Ω безпосередньо включає саме тертя (через швидкість тертя u_τ), що не є зручним для обробки даних про гідравлічний опір.

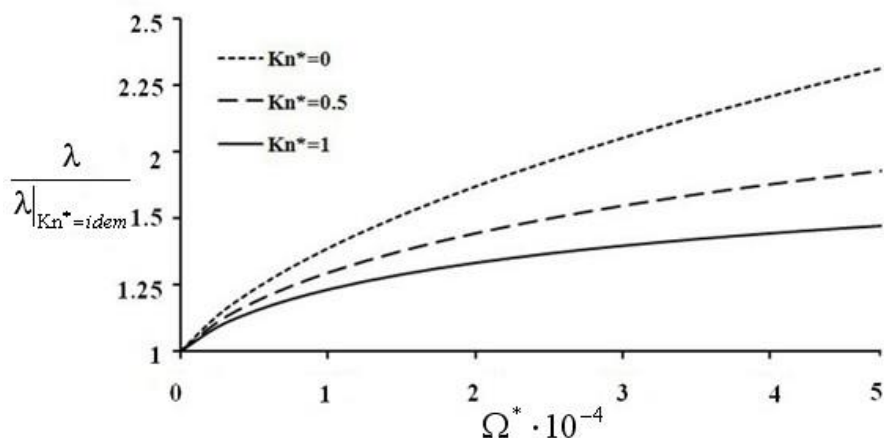


Рис. 3.4.10. Вплив обертання на гідравлічний опір.

З рисунка 3.4.10 видно, що коефіцієнт гідравлічного опору збільшується із збільшенням параметра обертання Ω^* , причому швидкість збільшення λ уповільнюється для більш високих частот обертання. Також, швидкість збільшення гідравлічного опору зменшується при збільшенні числа Кнудсена при тих самих параметрах обертання Ω^* (рис. 3.4.11). Це, очевидно, можна

пояснити ослабленою взаємодією потоку зі стінкою внаслідок сильних ефектів проковзування на стінці каналу для більший чисел Кнудсена [84].

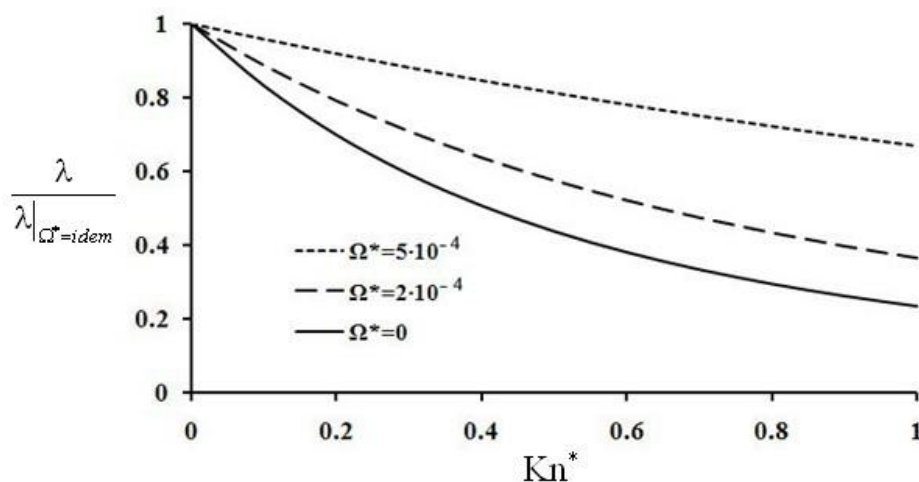


Рис 3.4.11. Вплив проковзування на гідравлічний опір.

Висновки до розділу 3

Проведено тестування методу ґрат Больцмана на основі порівняння результатів аналітичних досліджень та результатів, які отримані на основі методу збурень.

1. Результати моделювання змішаної конвекції в мікроканалах показали хорошу узгодженість результатів, отриманих на основі методу ґрат Больцмана та аналітичних розрахунків, що дає можливість застосовувати метод ґрат Больцмана для моделювання гідродинаміки і теплообміну в об'єктах з складної геометрією.

2. Розрахунки для змішаної конвекції показали:

- В той час як зміна значень числа Релея приводить до зміни характеристик потоку в центральній частині каналу, зміна значень числа Кнудсена в першу чергу впливає на зміни характеристик в пристіночній області.
- Варіація значень числа Прандтля практично не впливає на профілі швидкості для всіх значень числа Релея та Кнудсена.

– Загалом, збільшення числа Кнудсена зменшує швидкість теплопередачі, через утворення скачка швидкості і температури на стінці каналу. Ця тенденція порушується при відносно високих значеннях чисел Прандтля та Релея (для плоского $Pr = 10$ і $Ra = 100$; для циліндричного $Pr = 10$ і $Ra = 200$).

– Форма поперечного перерізу мікроканалу значно впливає на швидкість теплопередачі для випадку змішаної конвекції за відсутності ефектів проковзування. Якщо ефекти проковзування присутні, форма поперечного перерізу каналу практично не впливає на теплопередачу за відсутності природної конвекції при $Ra = 0$.

3. Результати досліджень центробіжної нестійкості нанорідин продемонстрували сильну залежність умов нестійкості від форми профілів температури та концентрації наночастинок. Зокрема:

– Стійкість потоку зменшується зі збільшенням відносної щільності наночастинок, яка може бути віднесена до додаткових збурень, які наночастинок вводять в потік.

– Вплив числа Прандтля на відцентрову нестійкість в криволінійному каналі проявляється по-різному для випадків стійких (температура внутрішньої стінки більша температури зовнішньої стінки) і нестійких (температура внутрішньої стінки менша температури зовнішньої стінки) температурних градієнтів. При від'ємному температурному градієнті критичне число Тейлора збільшується зі збільшенням числа Прандтля, тобто потік стає більш стійким. У разі додатних температурних градієнтів, збільшення числа Прандтля призводить до втрати стійкості течії.

– Більш високі значення числа Шмідта викликають зниження стабільності потоку і для додатних і від'ємних температурних градієнтів.

– При від'ємних (стабільних) температурних градієнтах, критичне число Діна зростає із зростанням числа Прандтля, тобто стійкість потоку зростає. При додатному градієнті температури спостерігається зворотна тенденція.

4. Моделювання повністю розвиненого турбулентного потоку в мікроканалі, що обертається показало:

- Збільшення сили Коріоліса (тобто кутової швидкості) призводить до зменшення поздовжньої компоненти швидкості потоку в центральній частині каналу, що призводить до появи вторинних зворотних течій, що характеризується від'ємними значеннями швидкості потоку.
- Швидкість зростання гідравлічного опору з ростом швидкості обертання залежить від значень числа Кнудсена. Зі збільшенням значення числа Кнудсена швидкість зростання гідравлічного опору зменшується, що обумовлено зменшенням взаємодії між потоком і стінками каналу.

РОЗДІЛ 4

МОДЕЛЮВАННЯ ТЕПЛООБМІНУ МЕТОДОМ МОНТЕ-КАРЛО

4.1 Теплообмін однорідної рідини в плоскому мікроканалі

Метод Монте-Карло чудово підходить для розв'язання крайових задач, які задані еліптичними рівняннями (наприклад, рівнянням Лапласа), або рівняннями параболічного типу. Даний параграф присвячений перевірці життєздатності метода Монте-Карло при моделюванні теплообміну в рідині. В даному параграфі описано алгоритм дослідження теплообміну рідини в плоскому мікроканалі зі стаціонарною течією, який базується на методі Монте-Карло. Також представлені результати чисельного моделювання, отримані за допомогою описаного нами методу. Математично теплообмін в чистій рідині описується за допомогою рівняння (4.1.1), дане рівняння представлено в безрозмірному виді

$$\text{Pe} \left(\bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} \right) = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{y}^2}. \quad (4.1.1)$$

Представимо рівняння (4.1.1) в кінцевих різницях. Температура в будь-якій точці сітки виражається через температури сусідніх точок:

$$\theta(i, j) = P_{x+} \theta(i+1, j) + P_{y+} \theta(i, j+1) + P_{x-} \theta(i-1, j) + P_{y-} \theta(i, j-1) \quad (4.1.2)$$

де

$$P_{x+} = \frac{\frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{x}} - \text{Pe} \bar{u} \Delta \bar{y}}{\text{Den}_\theta},$$

$$P_{y+} = \frac{\frac{\Delta \bar{x}}{\Delta \bar{y}}}{\text{Den}_\theta}, \quad P_{x-} = \frac{\frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{x}}}{\text{Den}_\theta}, \quad P_{y-} = \frac{\frac{\Delta \bar{x}}{\Delta \bar{y}}}{\text{Den}_\theta}$$

$$Den_{\theta} = 2 \left(\frac{\Delta \bar{x}}{\Delta \bar{y}} + \frac{\Delta \bar{y}}{\Delta \bar{x}} \right) - Re \bar{u} \Delta \bar{y}.$$

Кількість ітерацій для дослідження теплообміну рідин також зменшується у порівнянні з кількістю ітерацій для дослідження теплообміну нанорідин. Залишається лише перша із трьох ітерацій, які описані в розділі 2.2. Спочатку потрібно задати початкові та граничні умови. Щоб почати обчислення температури в точці (i, j) , частка приводиться в рух з цієї точки. Частка блукає по вузлах сітки від точки до точки до тих пір, поки не досягне границі. Після чого записується відома в цій граничній точці температура. Позначимо температуру в кінці першого блукання як $\theta_w(1)$. Потім з точки (i, j) випускається друга, третя, ..., N -а частки і записуються відповідні температури в кінцевих точках блукання: $\theta_w(2)$, $\theta_w(3)$, ..., $\theta_w(N)$. Температура внутрішньої точки визначається як сума усереднених температур граничних точок, досягнутих випадково блукаючими частинками. В результаті, формула для визначення температури рідини приймає вигляд

$$\theta(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \theta_w(n) . \quad (4.1.3)$$

Рівняння (4.1.3) розв'язується при наступних граничних умовах на стінках каналу:

$$\bar{u} = \bar{v} = 0, \quad \theta_w = 0. \quad (4.1.4)$$

На вході в канал температура рідини $\theta_l = 1$. Профіль швидкості задаємо класичним параболічним розподілом для плоского каналу

$$\bar{u} = 1 - \left(\frac{\bar{y} - 0.5}{0.5} \right)^2. \quad (4.1.5)$$

Перед проведенням комп'ютерних експериментів слід пересвідчитись що $Den_{\theta} > 0$. На значення знаменника Den_{θ} при розрахунках імовірності переходу в певному напрямку безпосередньо впливають розміри сітки. Довжина каналу

вибиралася досить великою для того, щоб віртуальна блукаюча частинка не досягала його правої межі. Точність методу залежить від кількості запусків блукаючої віртуальної частинки N з певною вузловий точки. Однак, велика кількість запусків N призводить до тривалого часу обчислення. Тому розрахункові експерименти проводилися при $N = 5 \cdot 10^4$.

Було проведено моделювання для дослідження зміни профілів температури рідини в залежності від координати \bar{x} . Також за допомогою описаного алгоритму отримано число Нуссельта. Моделювання проводилось у широкому діапазоні чисел Пекле $Pe = 1 \dots 1000$. На рис. 4.1.1 показано профіль температури рідини за ділянкою термічної стабілізації, довжина котрої розраховується по формулі

$$\frac{l_{ts}}{H} = 0.055Pe . \quad (4.1.5)$$

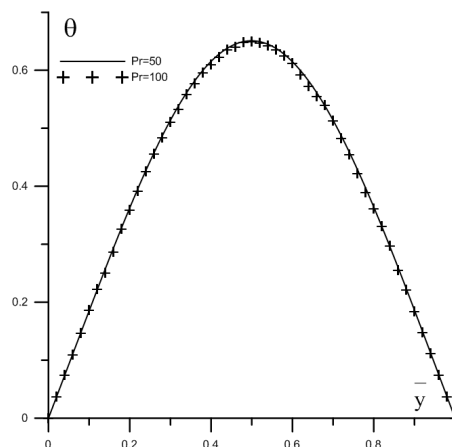


Рис. 4.1.1. Профілі температури однорідної рідини за ділянкою термічної стабілізації при різних числах Прандтля

З рисунка 4.1.1 видно що ми отримали типовий параболічний профіль температури. При зміні числа Прандтля профіль температури за ділянкою термічної стабілізації не змінюється. Отримані нами значення температур для однорідної рідини відповідають аналітичному рішенням задачі теплообміну в плоскому каналі з граничними умовами першого роду [94].

Обчисливши коефіцієнт тепловіддачі, як похідну температури по координаті поблизу стінки, ми можемо порахувати число Нуссельта

$$\text{Nu}_0 = \frac{\alpha_0 H}{k_f}. \quad (4.1.6)$$

Число Нуссельта для однорідної рідини $\text{Nu}_0 = 3.77$. Отримані нами результати добре узгоджуються з [94]. Таким чином, проведені розрахунки свідчать об адекватності запропонованого стохастичного підходу до моделювання теплообміну. Окремою перевагою методу Монте-Карло є можливість визначати температуру в будь-якій окремо взятої точці області без розрахунку всього поля температур.

4.2 Монте-Карло моделювання теплообміну нанорідини в плоскому мікроканалі

В даному розділі представлені результати чисельного Монте-Карло моделювання теплообміну нанорідини в плоскому мікроканалі зі стаціонарною течією [4.1.1 - 4.1.3]. В основі алгоритму, описаного в розділі 2, лежить система диференціальних рівнянь Бонжорно (2.1.8) – (2.1.11).

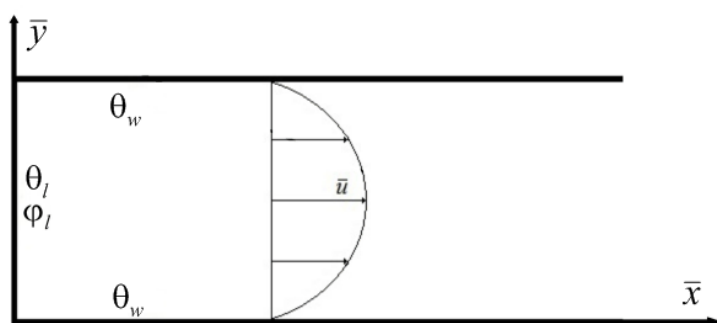


Рис. 4.2.1. Чисельна модель

В даному підрозділі будемо використовувати безрозмірну систему рівнянь (2.2.1) – (2.2.2) для дослідження теплообміну нанорідини в плоскому мікроканалі. У роботах [38, 39] детально досліджувався вплив наночастинок,

що знаходяться в рідині, на гідродинаміку її потоку. Було показано, що наночастинки досить слабо впливають на профіль швидкості течії рідини. Тому в даній задачі профіль швидкості задається класичним параболічним розподілом для плоского каналу

$$\bar{u} = 1 - \left(\frac{\bar{y} - 0.5}{0.5} \right)^2. \quad (4.2.1)$$

Безрозмірна система рівнянь (2.2.1) – (2.2.2) розв'язувалась при граничних умовах (2.2.3) на стінках каналу. Нагадаємо, що алгоритм дослідження теплообміну складається з декількох ітерацій. Спершу задаємо граничні умови на стінках мікроканалу і на вхідному отворі, а також задаємо профіль швидкості, для плоского мікроканалу ми задаємо параболічний профіль швидкості (рис. 4.2.1). На першій ітерації необхідно визначити температуру однорідної рідини, без наночастинок. Далі розраховується об'ємна частка наночастинок на відстані Δn від нижньої границі $\varphi_{\Delta n}$ з врахуванням максимально допустимої величини нев'язки (2.2.9). Потім визначається об'ємна частка наночастинок в мікроканалі. На третій ітерації визначається температура нанорідини.

Довжина каналу вибиралася досить великою для того, щоб віртуальна блукаюча частинка не досягала його правої межі. Точність методу залежить від кількості запусків блукаючої віртуальної частинки N з певною вузловий точки. Однак, велика кількість запусків N призводить до тривалого часу обчислення. Тому розрахункові експерименти проводилися при $N = 5 \cdot 10^4$.

Всі комп'ютерні експерименти проводилися при наступних умовах: температура на верхній і нижній стінках каналу $\theta_w = 0$, вхідний потік нанорідини має температуру $\theta_l = 1$ і профіль швидкості течії визначається параболічним законом (4.2.1).

Було проведено моделювання для дослідження зміни профілів температури нанорідини та об'ємної частки наночастинок в залежності від

координати \bar{x} . Моделювання проводилось при наступних параметрах: $Re = 1$, $Le = 10$, $RC = 1$, $\bar{\rho}c = 1.048$, $D = 0.05$, $\phi = 0.1$, $\bar{k} = 10$. На рис. 4.2.2, а показані профілі температури нанорідини для різних значень поздовжньої координати \bar{x} . Температура нанорідини експоненціально прямує до температури стінки каналу. Практично повне вирівнювання профілю температури можна спостерігати при $\bar{x} = 2$. Отримані нами значення температур для однорідної рідини відповідають аналітичному рішенню задачі теплообміну в плоскому каналі з граничними умовами першого роду [94]. Наявність наночастинок слабо впливає на форму профілю температури. Тим не менш помітні зміни похідної температури поблизу стінок каналу, що безпосередньо впливає на теплопередачу. Профілі об'ємної частки наночастинок для різних значень поздовжньої координати \bar{x} наведені на рис. 4.2.2, б. Значна різниця об'ємних часток наночастинок в точках з поперечними координатами $\bar{y} = 0.5$ і $\bar{y} = 0$ зумовлена різким градієнтом температури в цих точках. По мірі віддалення від лівої границі зменшується градієнт температури, що в свою чергу призводить до зменшення різниці об'ємних часток наночастинок.

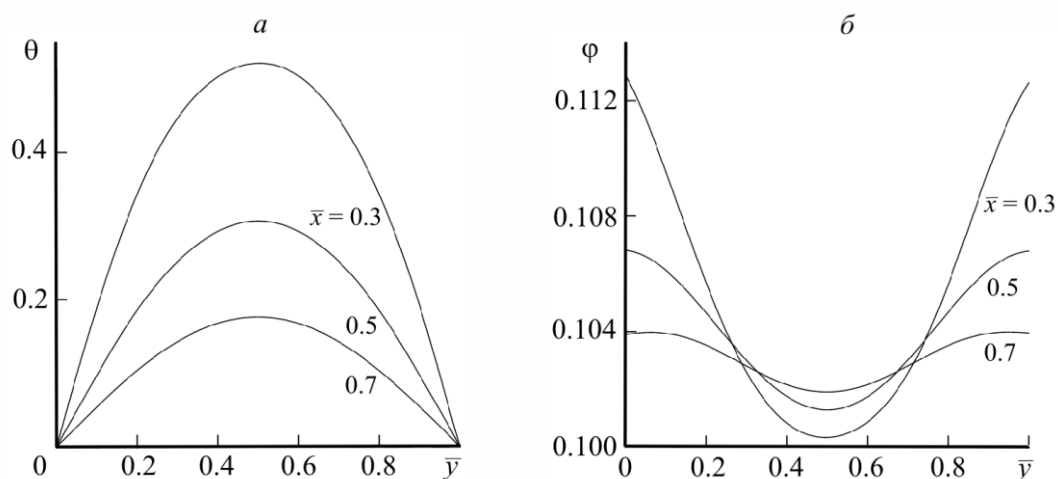


Рис. 4.2.2. Профілі температури нанорідин (а) і об'ємної частки наночастинок в ній (б)

Обчисливши коефіцієнт тепловіддачі, як похідну температури по координаті поблизу стінки, ми можемо порахувати число Нуссельта

$$\text{Nu} = \frac{\alpha H}{k_f}, \quad \text{Nu}_0 = \frac{\alpha_0 H}{k_f}. \quad (4.2.2)$$

На рис. 4.2.3 представлені результати розрахунків відносного числа Нуссельта Nu/Nu_0 для $\bar{x}=1$, при наступних параметрах: $\text{Pr}=1$, $\text{Re}=1$, $\text{Le}=10$, $\text{RC}=1$, $\bar{\rho}_s=1.048$, $D=0.05$. З цього малюнка видно, що додавання незначної кількості наночастинок в рідину призводить до значного збільшення теплообміну в ній. При цьому тепловіддача збільшується за лінійним законом, а залежність відносного числа Нуссельта від безрозмірного коефіцієнта теплопровідності є нелінійною за характером, тобто зі зростанням теплопровідності нанорідин швидкість збільшення теплообміну в ній зменшується. Даний результат обумовлений вибором функціональної залежності для ефективної теплопровідності нанорідин $K(\phi)$.

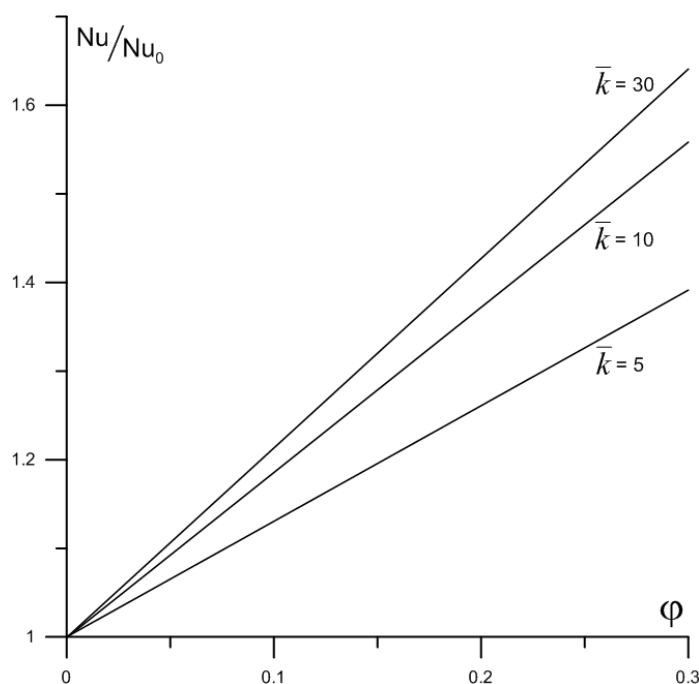


Рис. 4.2.3. Залежності відносного числа Нуссельта від об'ємної частки наночастинок в потоці рідини на вході в канал, при різних безрозмірних коефіцієнтах теплопровідності

Вплив числа Прандтля на теплообмін в нанорідині при наступних параметрах: $\bar{k}=10$, $\text{Re}=1$, $\text{Le}=10$, $\text{RC}=1$, $\bar{\rho}_s=1.048$, $D=0.05$ наведено на рис.

4.2.4. Збільшення числа Прандтля призводить до значного погіршення теплообміну. Залежність відносного числа Нуссельта від числа Прандтля носить нелінійний характер, а саме з ростом числа Прандтля швидкість падіння теплообміну зменшується.

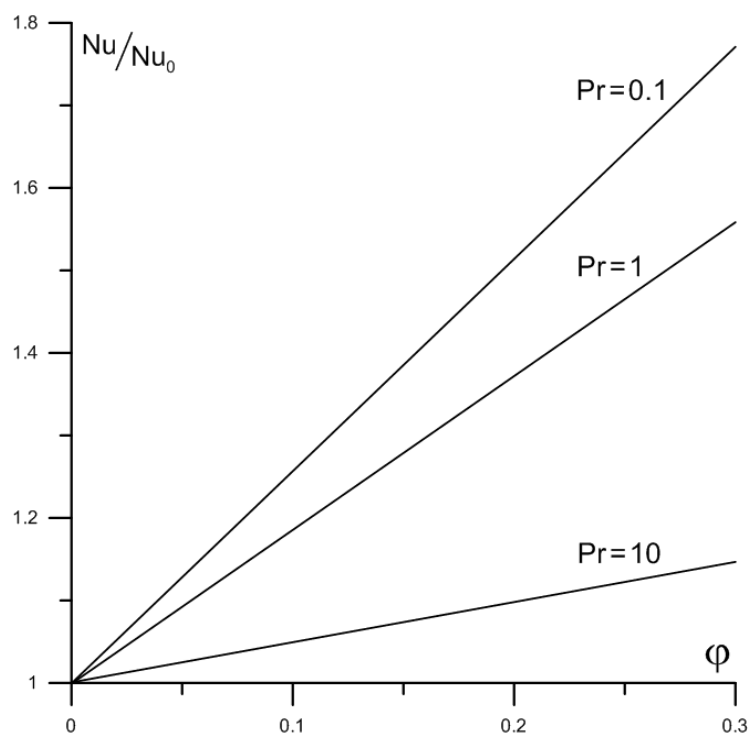


Рис. 4.2.4. Залежності відносного числа Нуссельта від об'ємної частки наночастинок в потоці рідини на вході в канал, при різних числах Прандтля

На рис. 4.2.5 показано вплив безрозмірного коефіцієнта дифузії на теплообмін при наступних параметрах: $\bar{k}=10$, $Pr=1$, $Re=1$, $Le=10$, $RC=1$, $\bar{\rho}_s=1.048$. Збільшення безрозмірного коефіцієнта дифузії призводить до невеликого поліпшення теплообміну.

Також були проведені комп'ютерні екскременти по дослідженню впливу числа Льюїса, а також числа Пекле на теплообмін при вищевказаних значеннях параметрів \bar{k} , RC і $\bar{\rho}_s$. Вплив цих чисел можна знехтувати.

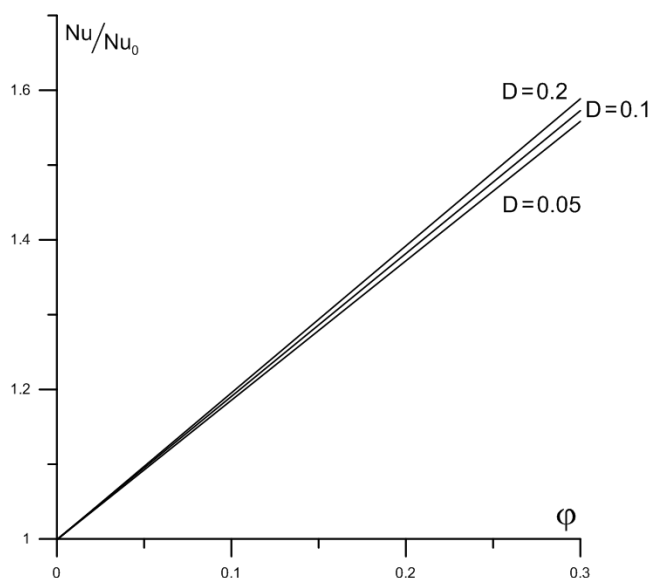


Рис. 4.2.5. Залежності відносного числа Нуссельта від об'ємної частки наночастинок в потоці рідини на вході в канал, при різних безрозмірних коефіцієнтах дифузії

4.3 Теплообмін нанорідини в граничному шарі

В даному розділі представлені результати чисельного Монте-Карло моделювання теплообміну нанорідини в граничному шарі на плоскій пластині зі стаціонарною течією. Алгоритм дослідження теплообміну нанорідини в граничному шарі являється модифікацією алгоритму для плоского мікроканалу і також базується на системі диференціальних рівнянь Бонжорно (2.1.8) – (2.1.11).

В даному підрозділі будемо використовувати безрозмірну систему рівнянь (2.2.10) – (2.2.11) для дослідження теплообміну нанорідини в граничному шарі на плоскій пластині. Як і в попередньому підрозділі ми нехтуємо впливом наночастинок на профіль швидкості течії рідини. Тому в даній задачі ми використаємо аналітичний розподіл швидкостей в пограничному шарі на плоскій пластині, яку обтікає рідина в поздовжньому напрямку [46]

$$f(\eta) = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \quad (4.3.1)$$

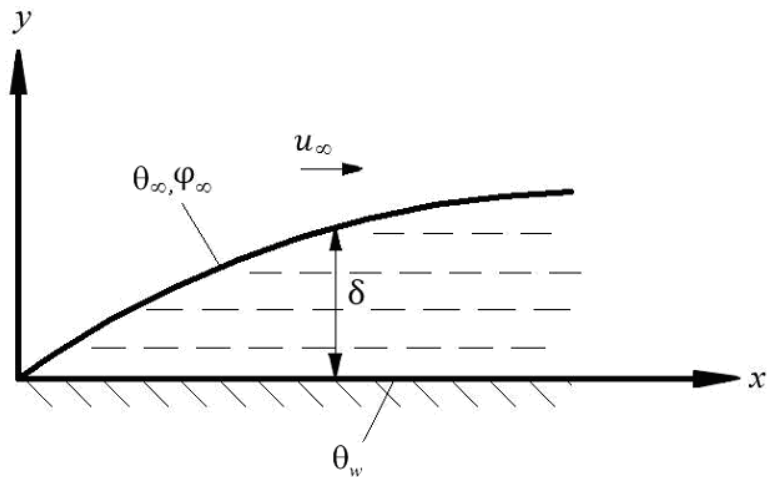


Рис. 4.3.1. Постановка задачі

Безрозмірна система рівнянь (2.2.10) – (2.2.11) розв'язувалась при граничних умовах (2.2.12) на плоскій пластині. Послідовність ітерацій залишається незмінною. Спершу задаємо граничні умови і профілі швидкостей. Для граничного шару профілі швидкостей задаються наступним чином

$$\bar{u} = f'(\eta), \quad \bar{v} = (\eta f'(\eta) - f(\eta)) \frac{\gamma^2}{\text{Re}}. \quad (4.3.2)$$

На першій ітерації необхідно визначити температуру однорідної рідини, без наночастинок. Далі розраховується об'ємна частка наночастинок на відстані Δl від нижньої границі $\varphi_{\Delta l}$ з врахуванням максимально допустимої величини нев'язки (2.2.9). Потім визначається об'ємна частка наночастинок в мікроканалі. На третій ітерації визначається температура нанорідини.

Із рівнянь (2.2.13) та (2.2.15) видно що блукаюча частинка може рухатися в трьох напрямках, тобто в даній задачі довжина граничного шару може бути довільною. Всі комп'ютерні експерименти проводилися при наступних умовах: температура плоскої пластини $\theta_w = 0$, температура рідини поза межами граничного шару $\theta_\infty = 1$ і профілі швидкостей течії визначається рівняннями (4.3.2). Всі результати, показані нижче на рисунках, були отримані для поздовжньої координати $\xi = 5000$.

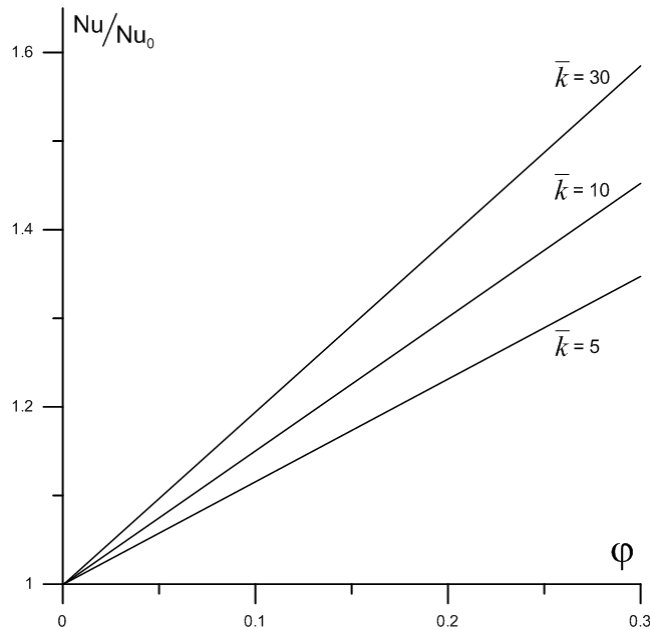


Рис. 4.3.2. Залежності відносного числа Нуссельта від об'ємної частки наночастинок в потоці рідини поза межами граничного шару, при різних безрозмірних коефіцієнтах теплопровідності

На рис. 4.3.2 представлені результати розрахунків відносного числа Нуссельта Nu/Nu_0 для $\xi = 5000$, при наступних параметрах: $Pr = 1$, $Re = 1000$, $Le = 10$, $RC = 1$, $\bar{\rho}c = 1.048$, $D = 0.05$. З цього рисунка видно, що додавання незначної кількості наночастинок в рідину призводить до значного збільшення теплообміну в ній. При цьому тепловіддача збільшується за лінійним законом, а залежність відносного числа Нуссельта від безрозмірного коефіцієнта теплопровідності є нелінійною за характером, тобто зі зростанням теплопровідності нанорідин швидкість збільшення теплообміну в ній зменшується.

Вплив числа Прандтля на теплообмін в нанорідині при наступних параметрах: $\bar{k} = 10$, $Re = 1000$, $Le = 10$, $RC = 1$, $\bar{\rho}c = 1.048$, $D = 0.05$ наведено на рис. 4.3.3. Збільшення числа Прандтля призводить до значного погіршення теплообміну. Залежність відносного числа Нуссельта від числа Прандтля носить нелінійний характер, а саме з ростом числа Прандтля швидкість падіння теплообміну зменшується.

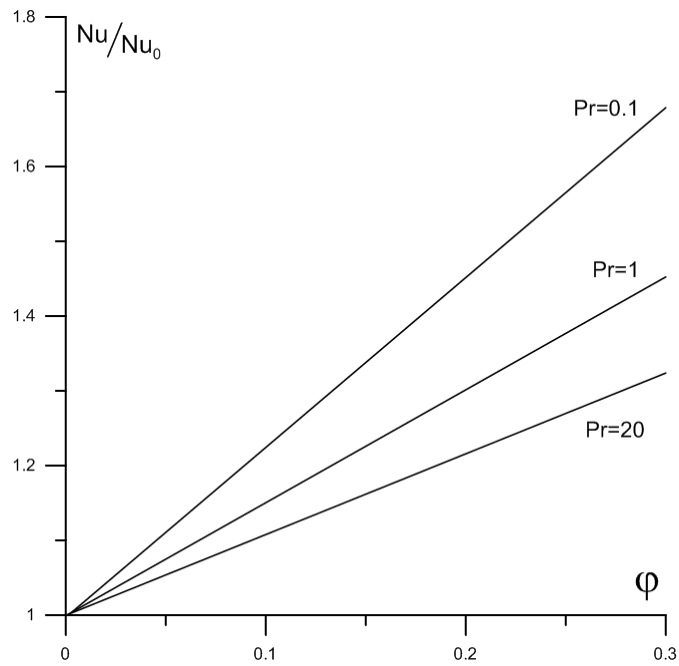


Рис. 4.3.3. Залежності відносного числа Нуссельта від об'ємної частки наночастинок в потоці рідини поза межами граничного шару, при різних числах Прандтля

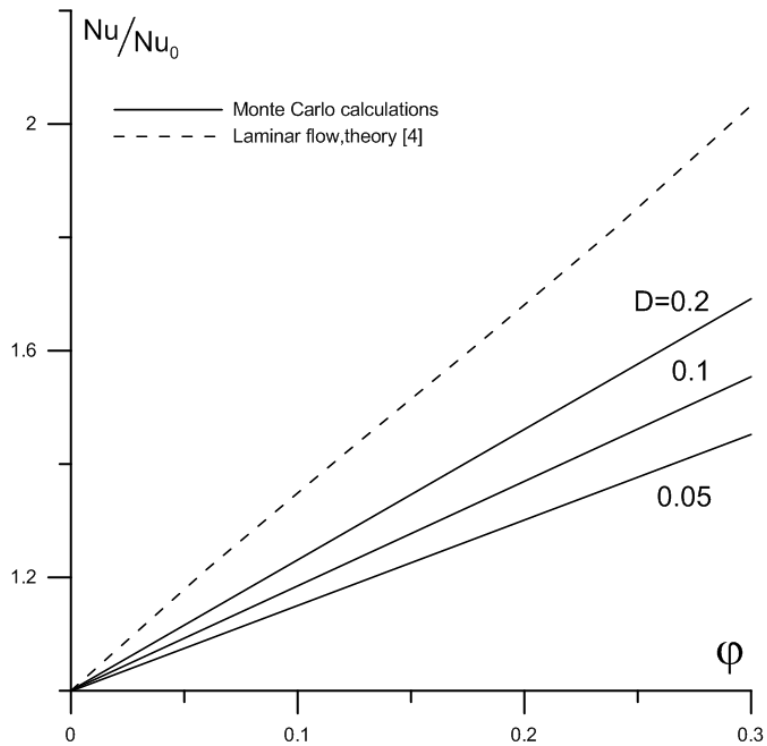


Рис. 4.3.4. Залежності відносного числа Нуссельта від об'ємної частки наночастинок в потоці рідини поза межами граничного шару, при різних безрозмірних коефіцієнтах дифузії

На рис. 4.3.4 показано вплив безрозмірного коефіцієнта дифузії на теплообмін при наступних параметрах: $\bar{k}=10$, $Pr = 1$, $Re = 1000$, $Le = 10$, $RC = 1$, $\bar{\rho}c = 1.048$. Збільшення безрозмірного коефіцієнта дифузії призводить до поліпшення теплообміну. На рис. 4.3.4 також показана крива для відносного числа Нуссельта, отримана Авраменком та співавторами [р4.п2.4]. Як видно з рис. 4.3.4 аналіз груп Лі для теплообміну нанорідин показує більшу інтенсивність теплообміну на стінці каналу в порівнянні з методом Монте-Карло. Проте, залежність відносного числа Нуссельта від об'ємної частки наночастинок в потоці рідини поза межами граничного шару носить лінійний характер в обох випадках.

Також були проведені комп'ютерні екскременти по дослідженню впливу числа Льюїса, а також числа Рейнольдса на теплообмін при вищевказаних значеннях параметрів \bar{k} , RC і $\bar{\rho}c$. Вплив цих чисел можна знехтувати.

4.4 Теплообмін нанорідини в граничному шарі з турбулентною течією

В даному параграфі описано алгоритм дослідження теплообміну нанорідини в граничному шарі з турбулентною течією, який базується на методі Монте-Карло. Також представлені результати чисельного моделювання, отримані за допомогою описаного нами методу. Алгоритм, представлений в даному параграфі, базується на розширеній системі диференціальних рівнянь Бонжорно (2.1.8) – (2.1.11) з урахуванням впливу турбулентності.

Система диференціальних рівнянь для дослідження тепло-масо обміну в граничному шарі з турбулентною течією має наступний вигляд

$$\begin{aligned} \text{PeRC}(\varphi) \left(\bar{u} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \text{Re} + \bar{v} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) = K(\varphi) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \bar{a}_t}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \bar{a}_t \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \\ + \frac{\bar{\rho}c}{Le} \left((1 + \bar{D}_{Bt}) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + D(1 + \bar{D}_{Tt}) \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)^2 \right), \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

$$\begin{aligned} & \text{Pe} \left(\bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \text{Re} + \bar{v} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) \\ &= \frac{1}{\text{Le}} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \bar{D}_{Bt}}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \bar{D}_{Bt} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + D \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + \frac{\partial \bar{D}_{Tt}}{\partial \eta} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \bar{D}_{Tt} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Система рівнянь (4.4.1), (4.4.2) представлена за допомогою безрозмірних величин, де

$$\xi = \frac{x u_\infty \rho_f}{\mu_f}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

$$u = \eta^{1/n}, \quad \bar{v} = \frac{\eta^{1+\frac{1}{n}}}{1+n} \delta'$$

$$\delta = \frac{\gamma x}{\text{Re}^{0.2}}, \quad \gamma = 0.37$$

$$\bar{a}_t = \frac{v_t}{\text{Pr}_t}, \quad \bar{D}_{Tt} = \frac{v_t}{\text{Sc}_{Tt}}, \quad \bar{D}_{Bt} = \frac{v_t}{\text{Sc}_{Bt}}$$

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_\infty - T_w},$$

$$\text{Re} = \frac{u_\infty \delta \rho_f}{\mu_f}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu_f}{k_f c_f}$$

$$\text{Pe} = \text{Re Pr}, \quad \text{Le} = \frac{k_f}{D_B}, \quad D = \frac{T_0 - T_w}{T_0} \frac{D_{Tt}}{D_B}, \quad \bar{\rho} c = \frac{\rho_p c_p}{\rho_f c_f},$$

$$R(\varphi) = (1 - \varphi) + \varphi \frac{\rho_p}{\rho_f},$$

$$RC(\varphi) = (1 - \varphi) + \varphi \frac{\rho_p c_p}{\rho_f c_f},$$

$$\bar{k} = \frac{k_p}{k_f}, \quad K(\varphi) = \frac{\bar{k} + 2 + 2\varphi(\bar{k} - 1)}{\bar{k} + 2 - \varphi(\bar{k} - 1)},$$

Система рівнянь (2.2.10), (2.2.11) розв'язувалась при граничних умовах (2.1.12). Як і раніше, ми нехтуємо впливом наночастинок на профіль швидкості течії рідини. Відповідно, ми використаємо аналітичний розподіл швидкостей в

граничному шарі на плоскій пластині з турбулентною течією, яку обтікає рідина в поздовжньому напрямку.

Вираз для турбулентної в'язкості був отриман на основі ренормалізаційно групового аналізу [99]. Він має наступний вигляд

$$v_t = v_{t0} \left(1 - \sqrt[3]{\frac{32}{3} \frac{kN}{(\sqrt{C_K} \varepsilon^{1/3} (6C_K \varepsilon^{2/3} + Nk))^{2/3}}} \right)^{1/3}, \quad (4.4.3)$$

де

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{l}, \quad \sqrt{C_\mu} k = v_{t0} \frac{\partial u}{\partial y},$$

Для дослідження теплообміну за допомогою методу Монте-Карло необхідно представити рівняння (4.4.1) і (4.4.2) в кінцево-різницевої формі. Температура в будь-якій точці сітки виражається через температури сусідніх точок

$$\theta(i, j) = P_{y+} \theta(i, j+1) + P_{y-} \theta(i, j-1) \quad (4.4.4)$$

де

$$P_{y+} = \frac{\overline{\rho c} (D(1 + \overline{D}_{Tr}) + (1 + \overline{D}_{Br})(\varphi(i, j+1) - \varphi(i, j))) + \text{Le}(K(\varphi) - \text{Pe}RC(\varphi)\overline{v}\Delta\eta + \overline{a}_t(i, j+1))}{\text{Den}_\theta},$$

$$P_{y-} = \frac{D\overline{\rho c}(1 + \overline{D}_{Tr}) + \text{Le}(K(\varphi) + \overline{a}_t(i, j))}{\text{Den}_\theta},$$

$$\begin{aligned} \text{Den}_\theta = & \overline{\rho c} (2D(1 + \overline{D}_{Tr}) + (1 + \overline{D}_{Br})(\varphi(i, j+1) - \varphi(i, j))) \\ & + \text{Le}(2K(\varphi) - \text{Pe}RC(\varphi)\overline{v}\Delta\eta + \overline{a}_t(i, j) + \overline{a}_t(i, j+1)) \end{aligned}$$

Віртуальна частинка, випущена з точки (i, j) може перейти в одному із двох напрямків. Випадкові блукання віртуальної частинки припиняються як тільки вона досягне границі. Після чого записується відома в цій граничній точці температура $\theta_w(1)$. Потім з точки (i, j) випускається друга, третя, ..., N -а

частки і записуються відповідні температури в кінцевих точках блукання: $\theta_w(2)$, $\theta_w(3)$, ..., $\theta_w(N)$. Температура в точці (i, j) визначається як сума усереднених температур граничних точок, досягнутих випадково блукаючими частинками. В результаті, температуру в точці (i, j) ми визначаємо як

$$\theta(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \theta_w(n) \quad (4.4.5)$$

Виразивши з кінцево-різницевого виді рівняння (4.4.2) об'ємну частку наночастинок в будь-якій точці сітки $\varphi(i, j)$ через значення об'ємних часток в сусідніх точках, отримуємо

$$\varphi(i, j) = P_{y+} \varphi(i, j+1) + P_{x-} \varphi(i-1, j) + P_{y-} \varphi(i, j-1) + F, \quad (4.4.6)$$

де

$$P_{y+} = \frac{\Delta\xi(1 + \bar{D}_{Bt} - \text{LePe}\bar{v}\Delta\eta - \bar{D}_{Bt}(i, j) + \bar{D}_{Bt}(i, j+1))}{\text{Den}_\varphi},$$

$$P_{x-} = \frac{\text{LePeRe}\bar{u}\Delta\eta^2}{\text{Den}_\varphi},$$

$$P_{y-} = \frac{\Delta\xi(1 + \bar{D}_{Bt})}{\text{Den}_\varphi},$$

$$F = \frac{D\Delta\xi((1 + \bar{D}_{Tt})\theta(i, j-1) - (2 + 2\bar{D}_{Tt} - \bar{D}_{Bt}(i, j) + \bar{D}_{Bt}(i, j+1))\theta(i, j) + (1 + \bar{D}_{Tt} - \bar{D}_{Bt}(i, j) + \bar{D}_{Bt}(i, j+1))\theta(i, j+1))}{\text{Den}_\varphi}$$

$$+ \frac{(1 + \bar{D}_{Tt} - \bar{D}_{Bt}(i, j) + \bar{D}_{Bt}(i, j+1))\theta(i, j+1)}{\text{Den}_\varphi}$$

$$\text{Den}_\varphi = \text{LePeRe}\bar{u}\Delta\eta^2 + \Delta\xi((2 + 2\bar{D}_{Bt} - \text{LePe}\bar{v}\Delta\eta) - \bar{D}_{Bt}(i, j) + \bar{D}_{Bt}(i, j+1)).$$

При визначенні об'ємної частки наночастинок в точці (i, j) віртуальна частинка може перейти в одному із трьох напрямків. Наявність доданка F в рівнянні (4.4.6) означає, що необхідно враховувати вплив середовища на кожному кроці віртуальної частинки. Наприклад, при першому запуску

випадково блукаючої частки з точки (i, j) вона зробить g_1 кроків. Тоді параметр $F(1)$ буде мати значення $\sum_{m=1}^{g_1} F_m$. При N -му запуску $F(N) = \sum_{m=1}^{g_N} F_m$. Об'ємна частка наночастинок в певній точці $\varphi(i, j)$ буде рівна

$$\varphi(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \varphi_w(n) + \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\sum_{m=1}^{g_n} F_m \right). \quad (4.4.7)$$

Послідовність ітерацій залишається незмінною. Спершу задаються граничні умови і профілі швидкостей. Далі визначається температура однорідної рідини, без наночастинок. Потім розраховується об'ємна частка наночастинок на відстані Δl від нижньої границі $\varphi_{\Delta l}$ з врахуванням максимально допустимої величини нев'язки (2.2.9). Далі визначається об'ємна частка наночастинок в мікроканалі. На останній ітерації визначається температура нанорідини.

Чисельне моделювання тепло- і масопереносу в турбулентному граничному шарі над плоскою пластинкою проводили для широкого діапазону параметрів Re , Pr , Sc , Sc_T , і φ_∞ . Моделювання проводилось для

$Pr_t = Sc_{Bt} = Sc_{Tt} = 1$; $D = 0.05$; $\frac{\rho_p}{\rho_f} = 3.98195$, $\frac{\rho_p c_p}{\rho_f c_f} = 0.728$, і $Pr = 10$ (типові дані для

нанорідини Al_2O_3 - вода); $\frac{\rho_p}{\rho_f} = 3.75236$, $\frac{\rho_p c_p}{\rho_f c_f} = 1.04788$, і $Pr = 20$ (типові дані для

нанорідини Al_2O_3 - етиленгліколь); $\frac{\rho_p}{\rho_f} = 3.68617$, $\frac{\rho_p c_p}{\rho_f c_f} = 1.06412$, і $Pr = 30$ (типові

дані для нанорідини Al_2O_3 - етиленгліколь) [2,3,4].

На рисунку 4.4.1 показана залежність об'ємної частки наночастинок від безрозмірної координати η для різних значень φ_∞ . Ці результати були отримані для $Re = 10^7$ і $Pr = 10$. Однак збільшення числа Шмідта, Sc і Sc_T . від 100 до 10000 слабо впливає на форму профілів об'ємної частки наночастинок. При збільшенні φ_∞ , різниця між φ_∞ (об'ємною часткою на зовнішньому краю граничного шару) і $\varphi(0)$ (об'ємною часткою на стінці) зменшується. Наприклад,

для $\varphi_\infty = 0.01$ значення об'ємної частки на стінці становить $\varphi(0) = 0.06$; іншими словами, об'ємна частка наночастинок в поперечному перерізі граничного шару відрізняється в 6 разів. Для ($\varphi_\infty = 0.4$, збільшення концентрації наночастинок у граничному шарі становить лише 9%, тобто $\varphi(0) = 0.45$.

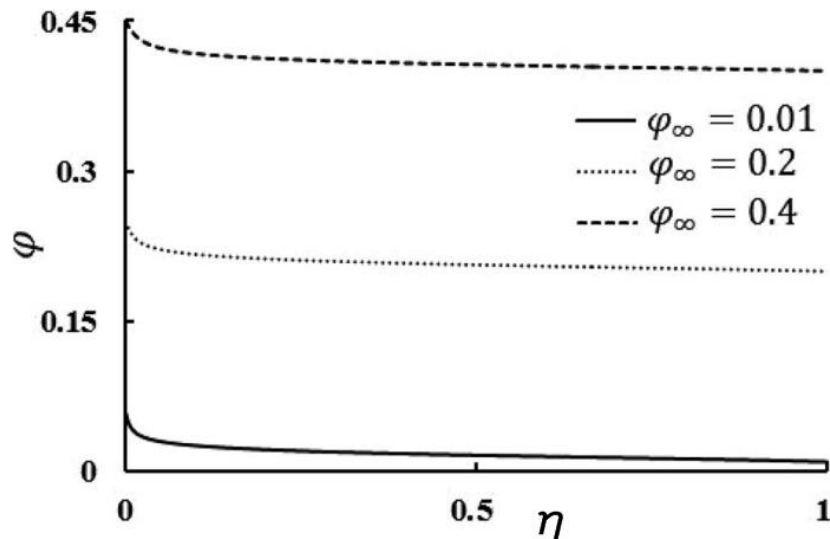


Рис. 4.4.1. Профілі об'ємної частки наночастинок в турбулентному граничному шарі для $Re = 10^7$, $Pr = 10$, $Sc = Sc_T = 10000$, $Pr_t = Sc_{Bt} = Sc_{Tt} = 1$, $D = 0.05$,

$$\rho_p / \rho_f = 3.98195 \quad \text{і} \quad \rho_p c_p / \rho_f c_f = 0.728$$

Профілі температурні нанорідини при різних значеннях φ_∞ представлені на рис. 4.4.2. Як видно з рисунка 4.4.2, повнота профілю температури зменшується зі зростанням об'ємної частки наночастинок на зовнішньому краю граничного шару, особливо області біля пластини. (Повнота профілю швидкості характеризується коефіцієнтом форми $H = \delta_1 / \delta_2$, де δ_1 - товщина зміщення, а δ_2 - товщина імпульсу. Зменшення повноти профілю означає, що площа під профілем стає меншою, а коефіцієнт форми зростає). Це пояснюється тим, що біля стіни найвища концентрація наночастинок. Отже, в районі стінки відбувається сильне гасіння турбулентних пульсацій, що призводить до зменшення повноти профілю температури у цій області.

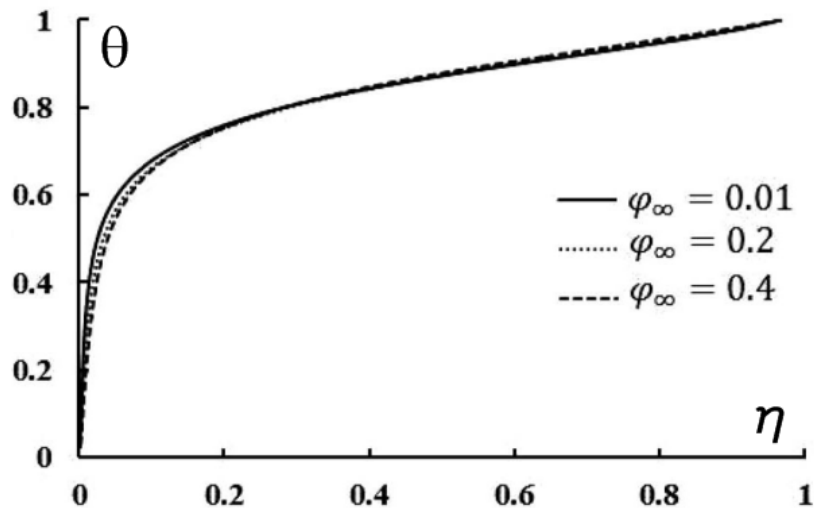


Рис. 4.4.2. Профілі температури в турбулентному граничному шарі для $Re = 10^7$, $Pr = 10$, $Sc = Sc_T = 10000$, $Pr_t = Sc_{Bt} = Sc_{Tt} = 1$, $D = 0.05$, $\rho_p/\rho_f = 3.98195$ і

$$\rho_p c_p / \rho_f c_f = 0.728$$

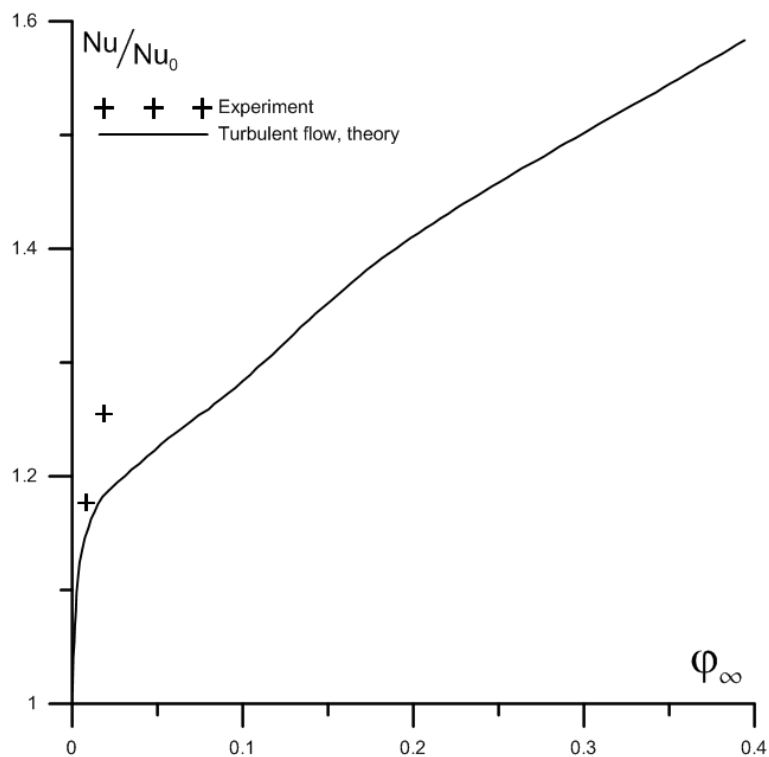


Рис. 4.4.3. Залежності відносного числа Нуссельта від об'ємної частки наночастинок в турбулентному потоці нанорідини поза межами граничного шару, при $Pr = 10$, $Sc = Sc_T = 10000$, $Pr_t = Sc_{Bt} = Sc_{Tt} = 1$, $D = 0.05$, $\rho_p/\rho_f = 3.98195$ і

$$\rho_p c_p / \rho_f c_f = 0.728.$$

Залежності відносного числа Нуссельта від об'ємної частки наночастинок в турбулентному потоці нанорідини представлені на рис. 4.4.3. Значення відносного числа Нуссельта, які були отримані експериментальним шляхом, зображені хрестиком на рис. 4.4.3. Відносні числа Нуссельта, отримані експериментальним шляхом, відображають більшу інтенсивність теплообміну нанорідин на стінці каналу в порівнянні з отриманими нами результатами. Залежність відносного числа Нуссельта від об'ємної частки наночастинок ϕ_∞ носить нелінійний характер.

Висновки до розділу 4

Представлені результати проведених численних досліджень теплообміну однорідної рідини і нанорідини в пласкому мікроканалі та граничному шарі на основі методу Монте-Карло.

Розрахунки показали, що додавання незначної кількості наночастинок в рідину призводить до збільшення теплообміну (при об'ємній частці наночастинок 0,05 тепловіддача збільшується на 10%). В ламінарному потоці тепловіддача збільшується за лінійним законом від об'ємної частки наночастинок. Залежність відносного числа Нуссельта від безрозмірного коефіцієнта теплопровідності є нелінійною за характером, тобто зі зростанням теплопровідності нанорідин швидкість збільшення тепловіддачі зменшується.

Збільшення числа Прандтля призводить до зниження інтенсивності теплообміну (при переході від $Pr = 1$ до $Pr = 10$ теплообмін зменшується на 80%). Збільшення параметру, який відображає відношення термодифузії до концентраційної дифузії приводить до поліпшення теплообміну, при цьому вплив зміни значення числа Льюїса, а також числа Пекле на теплообмін незначний.

Залежності відносного числа Нуссельта від об'ємної частки наночастинок в турбулентному потоці нанорідини носить нелінійний характер. Вплив значень чисел Шмідта, Льюїса, Рейнольдса та Прандтля на зміну відносного коефіцієнта тепловіддачі незначний.

ВИСНОВКИ

1. Розроблено стохастичний метод дослідження теплообміну в мікроканалі та межовому шарі при наявності наночасток на базі методу Монте-Карло. Запропонований алгоритм може застосовуватися як для однорідної рідини, так і нанорідин. Проведено комп'ютерне дослідження теплообміну нанорідини в пласкому мікроканалі та в межовому шарі.
2. Результати моделювання змішаної конвекції в мікроканалах показали хорошу узгодженість результатів, отриманих на основі методу ґрат Больцмана та аналітичних розрахунків, що дає можливість застосовувати метод ґрат Больцмана для моделювання гідродинаміки і теплообміну в об'єктах з складної геометрією.
3. Розрахунки для змішаної конвекції показали:
 - В той час як зміна значень числа Релея приводить до зміни характеристик потоку в центральній частині каналу, зміна значень числа Кнудсена в першу чергу впливає на зміни характеристик в пристіночній області.
 - Варіація значень числа Прандтля практично не впливає на профілі швидкості для всіх значень числа Релея та Кнудсена.
 - Загалом, збільшення числа Кнудсена зменшує швидкість теплопередачі, через утворення скачка швидкості і температури на стінці каналу. Ця тенденція порушується при відносно високих значеннях чисел Прандтля та Релея (для плоского $Pr = 10$ і $Ra = 100$; для циліндричного $Pr = 10$ і $Ra = 200$).
 - Форма поперечного перерізу мікроканалу значно впливає на швидкість теплопередачі для випадку змішаної конвекції за відсутності ефектів проковзування. Якщо ефекти проковзування присутні, форма поперечного перерізу каналу практично не впливає на теплопередачу за відсутності природної конвекції при $Ra = 0$.

4. Результати досліджень центробіжної нестійкості нанорідин продемонстрували сильну залежність умов нестійкості від форми профілів температури та концентрації наночастинок. Зокрема:

- Стійкість потоку зменшується зі збільшенням відносної щільності наночастинок, яка може бути віднесена до додаткових збурень, які наночастинок вводять в потік.

- Вплив числа Прандтля на відцентрову нестійкість в криволінійному каналі проявляється по-різному для випадків стійких (температура внутрішньої стінки більша температури зовнішньої стінки) і нестійких (температура внутрішньої стінки менша температури зовнішньої стінки) температурних градієнтів. При від'ємному температурному градієнті критичне число Тейлора збільшується зі збільшенням числа Прандтля, тобто потік стає більш стійким. У разі додатних температурних градієнтів, збільшення числа Прандтля призводить до втрати стійкості течії.

- Більш високі значення числа Шмідта викликають зниження стабільності потоку і для позитивних і негативних температурних градієнтів.

- При від'ємних (стабільних) температурних градієнтах, критичне число Діна зростає із зростанням числа Прандтля, тобто стійкість потоку зростає. При додатному градієнті температури спостерігається зворотна тенденція.

5. Моделювання повністю розвиненого турбулентного потоку в мікроканалі, що обертається показало:

- Збільшення сили Кориоліса (тобто кутової швидкості) призводить до зменшення поздовжньої компоненти швидкості потоку в центральній частині каналу, що призводить до появи вторинних зворотних течій, що характеризується від'ємними значеннями швидкості потоку.

- Швидкість зростання гідравлічного опору з ростом швидкості обертання залежить від значень числа Кнудсена. Зі збільшенням значення числа Кнудсена швидкість зростання гідравлічного опору зменшується, що обумовлено зменшенням взаємодії між потоком і стінками каналу.

6. Розрахунки методом Монте-Карло показали, що додавання незначної кількості наночастинок в рідину призводить до збільшення теплообміну (при об'ємній частці наночастинок 0,05 тепловіддача збільшується на 10%). В ламінарному потоці тепловіддача збільшується за лінійним законом від об'ємної частки наночастинок. Залежність відносного числа Нуссельта від безрозмірного коефіцієнта теплопровідності є нелінійною за характером, тобто зі зростанням теплопровідності нанорідин швидкість збільшення тепловіддачі зменшується. Збільшення числа Прандтля призводить до зниження інтенсивності теплообміну (при переході від $Pr = 1$ до $Pr = 10$ теплообмін зменшується на 80%).

7. Залежності відносного числа Нуссельта від об'ємної частки наночастинок в турбулентному потоці нанорідини носить нелінійний характер. Вплив значень чисел Шмідта, Льюїса, Рейнольдса та Прандтля на зміну відносного коефіцієнта тепловіддачі незначний.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Zaidi H. N., Ahmad N. MHD Convection Fluid Flow and Heat Transfer in an Inclined Microchannel with Heat Generation. American Journal of Applied Mathematics. 2017. Vol 5, №. 5. P. 124-131.
2. Mohamed Gad-el-Hak. Flow physics in MEMS. Mécanique & Industries Volume 2, Issue 4, July–August 2001, Pages 313-341
3. Mohamed Gad-el-Hak. MEMS Design and Fabrication. The MEMS Handbook Second Edition. Taylor & Francis Group, LLC, 2006. 647p.
4. Kirby B.J. Micro- and Nanoscale Fluid Mechanics: Transport in Microfluidic Devices. Cambridge university press, 2010. 512p.
5. Тирінов А.І. Тепломасообмін та гідродинаміка теплотехнічних мікро- та наносистем: дис. докт. технічних наук: 05.14.06 / технічна теплофізика та промислова теплоенергетика. Київ, 2017. 285 с.
6. Minkowycz W. J. et al. Handbook of numerical heat transfer. Wiley-Interscience, 1988, 1035p.
7. Howell J. R. The Monte Carlo method in radiative heat transfer. Journal of Heat Transfer. 1998. Vol. 120, №. 3. P. 547-560.
8. Bapat P. M., Tavlarides L. L., Smith G. W. Monte Carlo simulation of mass transfer in liquid-liquid dispersions //Chemical engineering science. 1983. Vol. 38. №. 12. P. 2003-2013.
9. Sokhansefat T., Kasaeian A. B., Kowsary F. Heat transfer enhancement in parabolic trough collector tube using Al₂O₃/synthetic oil nanofluid. Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2014. Vol. 33. P. 636-644.
10. Apostolopoulou M. et al. A kinetic Monte Carlo approach to study fluid transport in pore networks. The Journal of chemical physics. 2017. Vol. 147, №. 13. P. 134703.

11. Mele I., Tiselj I. Lattice Boltzmann method. Seminar, Faculty of mathematics and physics, Ljubljani Univ., Ljubljana. 2013. P. 2012-2013
12. Chen S., Doolen G. D. Lattice Boltzmann method for fluid flows. Annual review of fluid mechanics. 1998. Vol. 30, №. 1. P. 329-364.
13. Lim C. Y. et al. Application of lattice Boltzmann method to simulate microchannel flows. Physics of fluids. 2002. Vol. 14, №. 7. P. 2299-2308.
14. Inamuro T. et al. A lattice Boltzmann method for incompressible two-phase flows with large density differences. Journal of Computational physics. 2004. Vol. 198, №. 2. P. 628-644.
15. Karimipour A. et al. Simulation of copper–water nanofluid in a microchannel in slip flow regime using the lattice Boltzmann method. European Journal of Mechanics-B/Fluids. 2015. Vol. 49. P. 89-99.
16. Sheikholeslami M. Lattice Boltzmann method simulation for MHD non-Darcy nanofluid free convection. Physica B: Condensed Matter. 2017. Vol. 516. P. 55-71.
17. Antohe, B. V, Lage, J.L. A general two-equation macroscopic model for incompressible flow in porous media. International Journal of Heat and Mass Transfer. 1997. № 40. P. 3013-3024.
18. Getachew D., Minkowycz W.J., Lage J.L. A modified form of the K-e model for turbulent flows of an incompressible fluid in porous media. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2000. №43. P. 2909-2915.
19. Chung K., Lee K. S., Kim W. S. Modified Macroscopic Turbulence Modeling for the Tube with Channel Geometry Inporous Media. Numerical Heat Transfer: Part A: Applications. 2003. Vol. 43. №. 6. P. 659-668.

20. de Lemos M.J.S., Pedras M.H.J. Recent mathematical models for turbulent flow in saturated rigid porous media. *ASME J Fluids Engineering*. 2001. Vol. 123, №4. P. 935-940.
21. Pedras M. H. J., de Lemos M. J. S. On the mathematical description and simulation of turbulent flow in a porous medium formed by an array of elliptic rods. *Journal of Fluids Engineering*. 2001. Vol. 123, №. 4. P. 941-947.
22. Pedras M. H. J., de Lemos M. J. S. Macroscopic turbulence modeling for incompressible flow through undeformable porous media. *International journal of heat and mass transfer*. 2001. Vol. 44, №. 6. P. 1081-1093.
23. Pedras M. H. J., de Lemos M. J. S. Simulation of turbulent flow in porous media using a spatially periodic array and a low Re two-equation closure. *Numerical Heat Transfer: Part A: Applications*. 2001. Vol. 39, №. 1. P. 35-59.
24. Masuoka T., Takatsu Y., Inoue T. Chaotic behavior and transition to turbulence in porous media. *Microscale Thermophysical Engineering*. 2002. Vol.6. P. 347-357.
25. Barr D.W. Turbulent flow through porous media. *Ground Water*. 2001. Vol.39 P. 646-650.
26. Alvarez G., Bournet P.E., Flick D. Two-dimensional simulation of turbulent flow and heat transfer through stacked spheres. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2003. №.46. P. 2459-2469.
27. Flick D., Leslous A., Alvarez G. Semi-empirical modeling of turbulent fluid flow and heat transfer in porous media. *International Journal of Refrigeration*. 2003. Vol.26. P. 349-359.
28. Vadasz P. Small and moderate Prandtl number convection in a porous layer heated from below. *International Journal of Energy Research*. 2003. Vol.27. P. 941-960.
29. Hahn S., Je J., Choi H. Direct numerical simulation of turbulent flow with permeable walls. *J Fluid Mech*. 2002. Vol.450. P. 259-285.

30. Macedo H. H., Costa U. M. S., Almeida M. P. Turbulent effects on fluid flow through disordered porous media. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2001. Vol. 299 № 3-4. P. 371-377.
31. Авраменко, А. А., Басок, Б. И., Дмитренко, Н. П., Ковецкая, М. М., Тыринов, А. И., & Давыденко, Б. В.. Ренормализационно групповой анализ турбулентности. Киев. ТОВ «ЕКСПРЕС», 2013. 300 с.
32. Avramenko A. A., Kuznetsov A. V., Basok B. /., Blinov D. G. Investigation of stability of a laminar flow in parallel-plate channel filled with a fluid saturated porous medium. *Physics of flow*. 2005. № 17. P. 1-6.
33. Lee K., Howell J.R. Forced convective and radiative transfer within a highly porous layer exposed to a turbulent external flow field. *Proceedings of the 2th ASME. J. Thermal Engineering Conference, San Diego California ASTE99*. 1987. P. 1-4.
34. Getachev D., Minkowycz W.J., Lage J.L. A modified k - ϵ model for turbulent flows of incompressible fluid in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 2000. № 43. P. 2909-2915.
35. Masuka T., Takatsu Y. Turbulence model for flow in porous media. *Int. J. Heat Mass Transfer*. 1996. № 39. P. 2803-2890.
36. Takatsu Y. Masuka T. Turbulent Phenomena in flow through porous media. *J. Porous media*. 1998. № 1. P. 243-251.
37. Buongiorno J. Convective transport in nanofluids. *Journal of heat transfer*. 2006. Vol. 128, №. 3. P. 240-250.
38. Avramenko A. A., Blinov D. G., Shevchuk I. V. Self-similar analysis of fluid flow and heat-mass transfer of nanofluids in boundary layer. *Phys. Fluids*. 2011. № 23. P. 082002-1 – 082002-8.

39. Avramenko A.A., Blinov D.G., Shevchuk I.V., Kuznetsov A.V. Symmetry analysis and self-similar forms of fluid flow and heat-mass transfer in turbulent boundary layer flow of a nanofluid. *Phys. Fluids*. 2012. № 24. P. 082002-1 – 082002-8.
40. Beskok A., Karniadakis G. E. Report: a model for flows in channels, pipes, and ducts at micro and nano scales. *Microscale Thermophysical Engineering*. 1999. Vol. 3, №. 1. P. 43-77.
41. Deissler R. G. An analysis of second-order slip flow and temperature-jump boundary conditions for rarefied gases. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 1964. Vol. 7, №. 6. P. 681-694.
42. Sreekanth A. K. Slip Flow through Long Circular Tubes, in L. Trilling and H. Y. Wachman (eds). *Proc. Sixth Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics*. 1969. Vol. 1. P. 667 - 680.
43. Haji-Sheikh A., Sparrow E. M. The Solution of Heat Conduction Problems by Probability Methods. *Journal of Heat Transfer*. 1967. № 89. P. 121 – 130.
44. Кузнецов В. Ф. Решение задач теплопроводности методом Монте-Карло, М.: Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова, 1973.
45. Avramenko A. A., Shevchuk V. I., Tyrinov A. I., Blinov D. G. Heat transfer in stable film boiling of a nanofluid over a vertical surface. *International Journal of Thermal Sciences*. 2015. № 92. P. 106 – 118.
46. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. 1974. 712р.
47. McNamara G., Alder B. Analysis of the lattice Boltzmann treatment of hydrodynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 1993. Vol. 194, №. 1-4. P. 218-228.
48. Guo Z., Shi B., Wang N. Lattice BGK model for incompressible Navier–Stokes equation. *Journal of Computational Physics*. 2000. Vol. 165, №. 1. P. 288-306.

49. Sukop M. D. T. Thorne, Jr. Lattice Boltzmann Modeling Lattice Boltzmann Modeling. Springer. 2006. P. 14-17.
50. Begum R., Basit M. A. Lattice Boltzmann method and its applications to fluid flow problems. European Journal of Scientific Research. 2008. Vol. 22, №. 2. P. 216-231.
51. Wagner A. J. A practical introduction to the lattice Boltzmann method. Adt. notes for Statistical Mechanics. 2008. Vol. 463. P. 663.
52. Черчиньяни К., Гурмузова Э. А., Мемнонов В. П. Теория и приложения уравнения Больцмана. Мир. 1978.
53. He X., Luo L. S. Theory of the lattice Boltzmann method: From the Boltzmann equation to the lattice Boltzmann equation. Physical Review E. 1997. Vol. 56. №. 6. P. 6811.
54. Peng Y., Shu C., Chew Y. T. A 3D incompressible thermal lattice Boltzmann model and its application to simulate natural convection in a cubic cavity. Journal of Computational Physics. 2004. Vol. 193, №. 1. P. 260-274.
55. Tyrinov A. I. et al. Modeling of flows in a microchannel based on the Boltzmann lattice equation. Journal of Engineering Physics and Thermophysics. 2012. Vol. 85, №. 1. P. 65-72.
56. Barrios G. et al. The lattice Boltzmann equation for natural convection in a two-dimensional cavity with a partially heated wall. Journal of Fluid Mechanics. 2005. Vol. 522. P. 91-100.
57. Bao Y. B., Meskas J. Lattice Boltzmann method for fluid simulations. Department of Mathematics, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University. 2011.
58. Шлихтинг Г. Возникновение турбулентности. М.: Издательство иностранной литературы, 1962. 204 с.

59. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Courier Corporation, 2013. 704 p.
60. Avramenko A. A., Kuznetsov A. V., The onset of bio-thermal convection in a suspension of gyrotactic microorganisms in a fluid layer with an inclined temperature gradient. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow. 2010. Vol. 20, № 1. P. 111 – 129.
61. Avramenko A. A., Kuznetsov A. V. Bio-thermal convection caused by combined effects of swimming of oxytactic bacteria and inclined temperature gradient in a shallow fluid layer. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow. 2010. Vol. 20, № 2. P. 157.
62. Джозеф Д., Беляев Ю. Н., Яворская И. М. Устойчивость движений жидкости. Мир, 1981.
63. Козлов Л.Ф., Цыганюк А.И., Бабенко В.В. и др. Формирование турбулентности в сдвиговых течениях. Киев: Наукова думка, 1985. 284 с.
64. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. Москва: Наука, 1968. 503 с.
65. Аврамеко А.А. Теплообмен и гидродинамика около вогнутых поверхностей с вторичными течениями: дис. докт. техн. наук. Киев. 1997. 495 с.
66. Avramenko A. A. et al. Mixed convection in a vertical flat microchannel. International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017. Vol. 106. P. 1164-1173.
67. Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M., A model for collision processes in gases. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. Phys. Rev. 1954. №94. 511-525.
68. Tao L.N. On combined free and forced convection in channels. Heat Transfer. 1960. Vol. 82, №3. 233-238.
69. Sharipov F., Seleznev V. Data on internal rarefied gas flows. Phys. Chem. Ref. 1998. № 27. 657-706.

70. Sharipov F. Application of the Cercignani–Lampis scattering kernel to calculations of rarefied gas flows. II. Slip and jump coefficients. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*. 2003. Vol. 22, №. 2. P. 133-143.
71. Agrawal A., Prabhu S. V. Deduction of slip coefficient in slip and transition regimes from existing cylindrical Couette flow data. *Experimental Thermal and Fluid Science*. 2008. Vol. 32, №. 4. P. 991-996.
72. Çengel Y.A. *Heat Transfer: A Practical Approach*. Higher Education, second ed. 2002.
73. Avramenko A. A. et al. Mixed convection in a vertical circular microchannel. *International Journal of Thermal Sciences*. 2017. Vol. 121. P. 1-12.
74. Zou Q, He X. On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Phys Fluids*. 1997. Vol. 9, № 6. P. 1591-1596.
75. Tao L. N. Heat transfer of combined free and forced convection in circular and sector tubes. *Applied Scientific Research*. 1960. Vol. 9, № 1. P. 357.
76. Abramowitz M., Stegun I. A. *Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables*. Courier Corporation, 1965. 470p.
77. Авраменко А.О., Тирінов А.І., Дмитренко Н.П., Кравчук О.В. Застосування методу ґрат Больцмана до аналізу течії нанорідини в каналі між коаксіальними циліндрами. ISSN 0204-3602. *Пром. Теплотехніка*. 2016, т. 38, №3.
78. Avramenko A. A. et al. Centrifugal instability of nanofluids with radial temperature and concentration non-uniformity between co-axial rotating cylinders. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*. 2016. Vol. 60. P. 90-98.
79. Ding Y., Wen D. Particle migration in a flow of nanoparticle suspensions. *Powder Technology*. 2005. Vol. 149, № 2-3. P. 84-92.

80. Pak B. C., Cho Y. I. Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particles. *Experimental Heat Transfer an International Journal*. 1998. Vol. 11. № 2. P. 151-170.
81. Buongiorno J. et al. A benchmark study on the thermal conductivity of nanofluids. *Journal of Applied Physics*. 2009. Vol. 106, № 9. P. 094312.
82. Avramenko A. A. et al. Dean instability of nanofluids with radial temperature and concentration non-uniformity. *Physics of Fluids*. 2016. Vol. 28, № 3. P. 034104.
83. Yu H., Girimaji S. S., Luo L. S. DNS and LES of decaying isotropic turbulence with and without frame rotation using lattice Boltzmann method. *Computational Physics*. 2005. Vol. 209, № 2. P. 599-616.
84. Avramenko A. A., Shevchuk I. V., Kravchuk A. V. Turbulent incompressible microflow between rotating parallel plates. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*. 2018. Vol. 71. P. 35-46.
85. Layek G. C. et al. Unsteady convective diffusion in a rotating parallel plate channel. *Wärme-und Stoffübertragung*. 1994. Vol. 29, № 7. P. 425-430.
86. Ansari M. S., Seth G. S., Nandkeolyar R. Unsteady Hartmann flow in a rotating channel with arbitrary conducting walls. *Mathematical and Computer Modelling*. 2011. Vol. 54, № 1-2. P. 765-779.
87. Singh K. D. Exact solution of MHD mixed convection periodic flow in a rotating vertical channel with heat radiation. *International Journal of Applied Mechanics and Engineering*. 2013. Vol. 18, № 3. P. 853-869.
88. Schlichting H. and Gersten K. *Boundary Layer Theory*, 8th ed. Springer, Berlin, 2000.
89. Kamke E.. *Differentialgleichungen. Lösungsmethoden und Lösungen I. Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Vieweg & Teubner Verlag, Stuttgart. 1983.

90. Palabos library [Электронный ресурс]. – Режим доступа:// <http://www.palabos.org/>.
91. Avramenko A. A., Tyrinov A. I., Shevchuk I. V. Start-up slip flow in a microchannel with a rectangular cross section. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*. 2015. Vol. 29, №. 5-6. P. 351-371.
92. Avramenko A. A., Tyrinov A. I., Shevchuk I. V. Theoretical investigation of steady isothermal slip flow in a curved microchannel with a rectangular cross-section and constant radii of wall curvature. *European Journal of Mechanics-B/Fluids*. 2015. Vol. 54. P. 87-97.
93. Min T., Kim J. Effects of hydrophobic surface on skin-friction drag. *Physics of Fluids*. 2004. Vol. 16, №7. P. L55-L58.
94. Haji-Sheikh A., Nield D. A., Hooman K. Heat transfer in the thermal entrance region for flow through rectangular porous passages. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2006. Vol. 49, №. 17-18. P. 3004-3015.
95. Кравчук А. В., Авраменко А. А. Применение метода Монте-Карло к решению задачи теплообмена в наножидкостях. *Инженерно-физический журнал*. 2017. Vol. 90, № 5. P. 1167-1174.
96. Kravchuk A. V., Avramenko A. A. Application of the Monte Carlo Method to the Solution of Heat Transfer Problem in Nanofluids. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*. 2017. Vol. 90, №5. P. 1107-1114.
97. Кравчук А. В. Монте–Карло моделирование теплообмена наножидкости в канале. *Промышленная теплотехника*. 2016.
98. Avramenko A.A., Blinov D.G., Shevchuk I.V., Kuznetsov A.V. Symmetry analysis and self-similar forms of fluid flow and heat-mass transfer in turbulent boundary layer flow of a nanofluid. *Phys. Fluids*. 2012. № 24. P. 082002-1 – 082002-8.

99. Avramenko A. A. et al. Application of renormalization group analysis to two-phase turbulent flows with solid dust particles. *Journal of Mathematical Physics*. 2018. Vol. 59, №. 7. P. 073101.